Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Шевляков Артём Николаевич

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД ПОЛУГРУППАМИ И БУЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел
ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н., профессор
В.Н. Ремесленников

Омск 2017

Содержание

Введение

Диссертация посвящена алгебраической геометрии над алгебраическими системами, новому направлению математики, расположенному на стыке алгебры, геометрии и теории моделей. Внутри алгебраической геометрии над алгебраическими системами можно выделить универсальную алгебраическую геометрию, результатами которой являются утверждения, справедливые для всех алгебраических систем. Ознакомиться с основными результатами универсальной алгебраической геометрии можно по монографии Э. Данияровой, А. Мясникова, В. Ремесленникова [29] (или по серии статей этих же авторов [19]– [28]), а также по работам Б. Плоткина [74]–[83]. Следует отметить, что языки изложения основ универсальной алгебраической геометрии в работах Б. Плоткина и первой группы авторов существенно отличаются друг от друга, и в настоящей диссертации мы будем следовать монографии [29], а также нашим лекциям по универсальной алгебраической геометрии [129].

Универсальная алгебраическая геометрия исторически возникла как попытка обобщить результаты классической алгебраической геометрии (над полями) на класс всех алгебраических систем. Однако, дословное обобщение не всегда возможно. По этой причине для большинства результатов универсальной алгебраической геометрии выделяют область истинности то есть специальные классы алгебраических систем, для которых тот или иной результат останется истинным. К таким важнейшим классам алгебраических систем относится класс нетеровых по уравнениям алгебраических систем (и его различные обобщения), а также класс эквациональных областей. В связи с этим многие исследования данной диссертации направлены на изучение этих классов в различных многообразиях алгебраических систем.

Помимо результатов общего характера (относящихся к универсальной алгебраической геометрии) алгебраическая геометрия над алгебраическими системами представлена изучением алгебраических геометрий над конкретными алгебраическими системами. Полученные здесь результаты показывают (см., например, историю решения известной проблемы Тарского для свободной группы), что изучение алгебраической геометрии над некоторой алгебраической системой $\mathcal{A}$ является отправной точкой при исследовании элементарной теории $\mathcal{A}$. Таким образом, алгебраическая геометрии над алгебраическими системами имеет важнейшие приложения в математической логике и теории моделей.

Интерес современных исследователей к алгебраической геометрии над различными алгебраическими системами может продемонстрировать следующий (далеко не полный) перечень работ, посвященных изучению алгебраической геометрии над следующими алгебраическими системами:

1. свободной группой [5, 33, 48, 49, 50, 51, 57, 68, 70, 86, 107, 108, 109];
2. гиперболическими группами [3, 34, 35, 37, 36];
3. частично коммутативными группами (в различных многообразиях) [6, 7, 8, 40, 41, 42, 64, 65, 66, 112, 113, 114];
4. свободной метабелевой группой [9, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 98];
5. разрешимыми группами [39, 71, 99, 100, 101, 102, 103, 104];
6. алгебрами Ли и антикоммутативными алгебрами [10, 15, 16, 18, 17, 31, 84, 92, 97, 92, 30];
7. свободной полугруппой [46, 58, 59, 60, 110].

Исследования настоящей диссертации продолжают указанный выше список работ и посвящены изучению алгебраической геометрии в различных классах полугрупп и булевых алгебр.

Важность свойства нетеровости по уравнениям при изучении алгебраической геометрии над алгебраической системой $\mathcal{A}$ была указана выше. К настоящему времени нетеровость по уравнениям (или ее отсутствие) доказана для многих алгебраических систем. Например, нетеровой по уравнениям является любая линейная группа над нетеровым кольцом (в частности, любая свободная группа, любая полициклическая группа, любая конечно порожденная метабелева группа) [1, 5, 38], любая гиперболическая группа без кручения [109], любая свободная разрешимая группа [39], любая частично коммутативная группа, граф которой не содержит треугольников [6], любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли [14]. Кроме того, отметим работу [97], посвященную нетеровости по уравнениям универсальной обертывающей алгебры сплетения абелевых алгебр Ли, и работу [43] о нетеровости вполне простых полугрупп.

С другой стороны, не являются нетеровыми по уравнениям все бесконечно порожденные нильпотентные группы [69], сплетение $A \wr B$ неабелевой группы A и бесконечной группы B [4], минимаксные алгебраические системы $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}; \max, \min, \cdot, +, -, 0, 1 \rangle$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}; \max, \min, +, 0, 1 \rangle$ [32], конечно порожденные полугруппы с бесконечно убывающими цепочками идемпотентов (в частности, свободные инверсные полугруппы) [44], конечно порожденные нехопфовые группы (в частности, группа Баумслага-Солитэра) [44].

Особо отметим монографию [54], где строится много примеров нетеровых и не нетеровых по уравнениям полугрупп и изучаются их свойства.

Заметим, что открытым является вопрос о нетеровости по уравнения свободной антикоммутативной, свободной ассоциативной и свободной алгебры Ли. Кроме того, неизвестно, будет ли свободное произведение двух нетеровых по уравнениям групп нетеровой по уравнениям группой.

Понятия $\mathrm{q}_\omega(\mathrm{u}_\omega)$-компактности являются обобщениями свойства нетеровости по уравнениям и играют важную роль в исследованиях по универсальной алгебраической геометрии. В работе Б.И. Плоткина [77] строится пример группы, являющейся q_ω-компактной, но не нетеровой по уравнениям. В работе М.Котова [52] построен аналогичный пример в языке, состоящем из счетного множества унарных функциональных символов. Также работа [52] содержит необходимые условия q_ω- и u_ω-компактности алгебр произвольного языка $\mathcal{L}$.

В настоящей диссертации исследуются классы q_ω- и u_ω-компактных булевых алгебр и полурешеток.

Укажем некоторые важнейшие результаты об эквациональных областях. В [22] были полностью описаны эквациональные области в классе алгебр Ли, антикоммутативных и ассоциативных алгебр. Отметим, что исторически первыми примерами эквациональных областей в классе групп являются свободные неабелевы группы (впервые было доказано Г. Гуревичем, доказательство см. в [57]), гиперболические группы без кручения [1, 73], конечные неабелевы простые группы (см. доказательство в [62]) и свободное произведение $G_1 * G_2$ произвольных групп G_1, G_2 (кроме случая $Z_2 * Z_2$) [2].

В настоящей диссертации исследуются эквациональные области в различных классах полугрупп.

В заключение укажем на нюанс, который возникает при переносе общих результатов универсальной алгебраической геометрии на конкретную группу (полугруппу, булеву алгебру, ...). Дело в том, что многие алгебро-геометрические свойства группы (полугруппы, булевой алгебры, ...) существенно зависят от языка, в котором она рассматривается как алгебраическая система. Зависимость алгебро-геометрических свойств от языка настолько сильная, что результаты, полученные для группы (полугруппы, булевой алгебры, ...) в языке $\mathcal{L}$, могут быть уже не верны при обеднении или обогащении языка $\mathcal{L}$. Например, если группа G в языке $\mathcal{L}$ является нетеровой по уравнениям (эквациональной областью), то G может уже не быть таковой при обогащении (обеднении) языка $\mathcal{L}$. В настоящей диссертации данный эффект наблюдается при изучении эквациональных областей в классе полугрупп, поскольку полугруппу S можно рассматривать в одном из следующих языков $\{\cdot\}$, $\{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$, $\{\cdot, {}^{-1}\}$, $\{\cdot, {}^{-1}\} \cup \{s \mid s \in S\}$.

Основные результаты. На защиту выносятся следующие результаты (ниже в виде ссылок указаны работы, где был опубликован соответствующий результат).

1. Для булевой алгебры, рассматриваемой в языке с константами, найдены необходимые и достаточные условия слабой нетеровости, а также q_ω- и u_ω-компактности. Получены результаты о геометрической эквивалентности булевых алгебр [117].

2. Доказано, что если полугруппа, рассматриваемая в языке без констант, является эквациональной областью, то она тривиальна [118].

3. Описаны эквациональные области в следующих классах полугрупп (во всех пунктах ниже полугруппы рассматриваются в языке с константами, и кроме того в пунктах (a)–(c) полугруппы рассматриваются с операцией обращения):

   (a) инверсные полугруппы [119];

   (b) клиффордовы полугруппы [121];

   (c) вполне простые полугруппы [122];

   (d) конечные простые полугруппы [120];

   (e) полугруппы с конечным минимальным идеалом (в частности, все конечные полугруппы) [125].

4. Доказано, что свободная полурешетка бесконечного ранга $\mathcal{F}$, рассматриваемая в языке с константами, нетерова по совместным системам. Описаны координатные полурешетки, соответствующие неприводимым алгебарическим множествам над $\mathcal{F}$. Указан критерий совместности систем уравнений над $\mathcal{F}$. Приведен алгоритм проверки совместности систем уравнений над $\mathcal{F}$ [123].

5. Развита универсальная алгебраическая геометрия над языками, содержащими предикатный символ $\neq$. Получена классификация ко-областей, нетеровых по уравнениям, q_ω- и u_ω-компактных алгебраических систем таких языков. Кроме того, для произвольной алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$, содержащего предикатный символ $\neq$, описаны неприводимые множества и неприводимые координатные алгебры [127].

6. Для линейно упорядоченной полурешетки L_l из l элементов изучены свойства неприводимых алгебраических множеств. Кроме того, вычислено среднее число неприводимых компонент алгебраических подмножеств в L_l^n [126].

7. Найдена полурешетка порядка n, над которой число несовместных уравнений от m переменных максимально (минимально). Показано, что наиболее вероятным решением случайно выбранного уравнения от одной переменной над произвольной полурешеткой ранга $n \geq 6$ будет пустое множество [124].

Результаты диссертации докладывались на Омском алгебраическом семинаре (2011-2016), международных математических конференциях “Мальцевские чтения” (Новосибирск, 2011-2016), школе-конференции “Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей” (Эрлагол, 2012), конференции “Алгебра и линейная оптимизация”, посвященной 100-летию Н.С. Черникова (Екатеринбург, 2012), нью-йоркском семинаре по теории групп (Нью-Йорк, США, 2014), алгебраическом семинаре в Stevens Institute of Technology (Хобокен, США, 2014), международном вебинаре по теории групп (2014), конференции “Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач” (Омск, 2015), восьмой иранской международной конференции по теории групп (Тебриз, Иран, 2016), конференции “Groups, Algebras and Identities”, посвященной 90-летию Б.И. Плоткина (Иерусалим, Израиль, 2016), Алгебра и Логика: Теория и Приложения (Красноярск, 2016), Общеинститутском семинаре ИМ СО РАН (Новосибирск, 2017).

Диссертация изложена на 173 страницах, содержит введение, главу с предварительными сведениями, шесть глав с полученными результатами и список литературы. Главы разбиты на параграфы, список литературы содержит 130 наименований. Нумерация утверждений (теорем, лемм, следствий), определений и примеров сквозная внутри каждой главы и состоит из двух чисел: первое число — это номер главы, второе — порядковый номер внутри главы.

Результаты диссертации опубликованы в работах [115]– [127], входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Содержание работы В главе 0 даются основные определения из теории полугрупп, булевых алгебр, теории моделей и универсальной алгебраической геометрии.

Глава 1 посвящена изучению уравнений над булевыми алгебрами и решению следующих проблем универсальной алгебраической геометрии (в своей работе мы рассматриваем булевы алгебры в языке с произвольным количеством константных символов; булеву алгебру, в которой константы порождают подалгебру изоморфную $\mathcal{C}$, мы называем булевой $\mathcal{C}$-алгеброй).

Проблема 1. *Описать все нетеровые по уравнениям, слабо нетеровые,* q_ω*- и* u_ω*-компактные булевы* $\mathcal{C}$*-алгебры.*

Проблема 2. *Когда две булевых* $\mathcal{C}$*-алгебры геометрически эквивалентны друг другу.*

Основные результаты главы 1 заключаются в доказательстве следующих теорем, решающих указанные выше проблемы.

Теорема 1.5. *Булева* $\mathcal{C}$*-алгебра* $\mathcal{B}$ *нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда подалгебра* $\mathcal{C}$*, порожденная константами, конечна.*

Теорема 1.6. *Если булева* $\mathcal{C}$*-алгебра* $\mathcal{B}$ *нетерова по совместным системам уравнений, то* $\mathcal{B}$ *нетерова по уравнениям.*

Теорема 1.10. *Булева* $\mathcal{C}$*-алгебра* $\mathcal{B}$ q_ω*-компактна тогда и только тогда, когда над* $\mathcal{B}$ *не существует* E_0*- и* E_1*-систем.*

Теорема 1.11. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ u_ω-компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_k-систем для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1.13. *Две булевы $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *любая несовместная над $\mathcal{B}_1$ система уравнений несовместна над алгеброй $\mathcal{B}_2$ и наоборот;*

2. *точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_j | j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$ тогда и только тогда, когда она существует и равна 0 в $\mathcal{B}_2$.*

Параграф 2 посвящен решению следующей проблемы.

Проблема 3. *Для полугруппы S, рассматриваемой в одном из полугрупповых языков, определить, будет ли S эквациональной областью.*

Данная проблема решена лишь частично: нам удалось описать эквациональные области в важнейших классах полугрупп (инверсные, клиффордовы, вполне простые, конечные простые полугруппы, а также полугруппы с неединичным центром, и класс всех конечных полугрупп). Доказанные нами результаты содержаться в следующих теоремах.

Теорема 2.8. *Любая инверсная полугруппа S, которая не является группой, не будет эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s \mid s \in S\}$.*

Теорема 2.14. *Любая клиффордова полугруппа $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ при $|\Omega| > 1$ не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$.*

Теорема 2.23. *Вполне простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s | s \in S\}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1. *сэндвич-матрица $\mathbf{P}$ не вырождена, то есть нормализованный вид $\mathbf{P}$ не содержит двух одинаковых строк или столбцов;*

2. *структурная группа G является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G) = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g \mid g \in G\}$.*

Теорема 2.28. *Конечная простая полугруппа* $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ *является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_s(S)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *матрица* $\mathbf{P}$ *не вырождена;*

2. *группа* G *является эквациональной областью в групповом языке* $\mathcal{L}_g(G)$.

Теорема 2.32. *Пусть* I *— левый (правый) идеал полугруппы* S*, элемент* $e \in S$ *коммутирует со всеми элементами идеала* I*, и существует элемент* $a \in I$ *для которого* $ea \neq a$. *Тогда полугруппа* S *не может быть эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_s(S)$.

Теорема 2.46. *Полугруппа* S *с конечным ядром* $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ *является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_s(S)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *ядро* K *является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_s(K)$;

2. *отношение эквивалентности* $\sim_K$ *тривиально*

(из второго условия следует, что эквациональная область S *с конечным ядром должна быть конечной полугруппой).*

Заметим, что несмотря на почти полное совпадение формулировок теорем 2.23, 2.28 ни один из результатов не следует из другого, поскольку в теореме 2.23 полугруппы рассматриваются в языке с обращением $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, а в теореме 2.28 используется язык без обращения $\mathcal{L}_s(S)$ (см. также пояснения в параграфе 0.4 и в начале параграфа 2.5). Кроме того, в следующей теореме эквациональные области были описаны в случае языка без констант.

Теорема 2.1. *Любая нетривиальная полугруппа в языке* $\mathcal{L}_s = \{\cdot\}$ *не является эквациональной областью.*

В главе 3 мы изучаем уравнения над свободной полурешеткой $\mathcal{F}$, рассматриваемой в языке с константами $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$ и применительно к $\mathcal{F}$ рассматриваем следующие стандартные проблемы универсальной геометрии.

Проблема 4. *Определить класс алгебраических систем (нетеровые по уравнениям, нетеровые по совместным системам, слабо нетеровые по уравнениям, q_ω-компактные или u_ω-компактные полурешетки), к которому принадлежит свободная полурешетка $\mathcal{F}$.*

Проблема 5. *Описать неприводимые алгебраические множества над свободной полурешеткой $\mathcal{F}$.*

Проблема 6. *Предложить алгоритм, решающий проблему совместности произвольной системы уравнений* $\mathbf{S}$ *над свободной полурешеткой $\mathcal{F}$.*

Указанные выше проблемы решаются в следующих теоремах диссертации (проблема 6 решается в параграфе 3.4, в котором описан требуемый алгоритм).

Теорема 3.4. *Любая совместная система уравнений над $\mathcal{F}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Иными словами, полурешетка $\mathcal{F}$ нетерова по совместным системам.*

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{F}$ — свободная полурешетка бесконечного ранга, с множеством свободных порождающих $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$; S — конечно порожденная $\mathcal{F}$-полурешетка и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *S является координатной $\mathcal{F}$-полурешеткой некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{F}$;*

2. *S вложима (как алгебраическая система языка $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$) в $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ для некоторого $n < \omega$, где $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ — свободная полурешетка, порожденная множеством $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$;*

3. *на S истинны универсальные формулы $\Sigma = \{\varphi_i, \psi_i \mid i \in \mathcal{I}\}$,*

$$\varphi_i\colon\ \forall x, y\, (x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i \to (x\mathbf{a}_i = y \vee x = y\mathbf{a}_i \vee x = y))\,,$$

$$\psi_i\colon\ \forall x, y\, (xy \leq \mathbf{a}_i \to (x \leq \mathbf{a}_i \vee y \leq \mathbf{a}_i))\,.$$

В главе 4 мы, следуя работе [23], изучаем алгебраическую геометрию над языками с предикатами. Обозначим через $\mathcal{L}_{\neq}$ расширение произвольного функционального языка $\mathcal{L}$ с помощью бинарного предиката $\neq$, который в любой алгебраической системе $\mathcal{A}$ будет интерпретироваться естественным образом. Оказывается, алгебраическая геометрия над алгебраической системой языка $\mathcal{L}_{\neq}$ должна удовлетворять достаточно сильным условиям, которые сужают возможности для реализации ее тех или иных свойств. Приведем лишь некоторые из полученных результатов.

Теорема 4.3. *Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над $\mathcal{L}_{\neq}$-алгеброй $\mathcal{A}$ неприводимо тогда и только тогда, когда Y является атомом полурешетки $\mathbf{AS}_n$.*

Теорема 4.4. *$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ является ко-областью тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ тривиальна, то есть $|A| = 1$.*

Теорема 4.6. *$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда класс $\mathbf{AS}_n$ конечен для каждого $n \geq 1$.*

Теорема 4.8. *Для $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебры $\mathcal{A}$ следующие три условия эквивалентны:*

1. *алгебра $\mathcal{A}$ u_ω-компактна;*
2. *алгебра $\mathcal{A}$ q_ω-компактна;*
3. *над $\mathcal{A}$ не существует бесконечной несовместной системы уравнений, у которой все конечные подсистемы совместны.*

Согласно основным теоремам универсальной алгебраической геометрии, каждое алгебраическое множество Y над конечной алгебраической системой $\mathcal{A}$ допускает единственное представление в виде объединения неприводимых алгебраических множеств (неприводимых компонент множества Y). Таким образом, неприводимые множества играют роль “атомов”, из которых может быть составлено любое алгебраическое множество над $\mathcal{A}$. Размер и количество таких “атомов” является важной алгебро-геометрической характеристикой конечной алгебраической системы $\mathcal{A}$. Таким, образом можно сформулировать следующий вопрос.

Проблема 7. *Для конечной алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ описать класс неприводимых алгебраических множеств и определить средний размер алгебраического множества.*

В главе 5 мы решает указанную выше проблему для линейно упорядоченной полурешетки L_l, состоящей из l элементов. К основным результатам данного параграфа могут быть отнесена следующие результаты диссертации.

Теорема 5.6. *Число Y-неприводимых разбиений (см. определение в главе 5) алгебраического множества $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ равно числу неприводимых компонент множества Y.*

Теорема 5.7. *Пусть*

$$Y = \bigcup_{\text{разбиение } \sigma \ Y\text{-неприводимо}} Y_\sigma \tag{1}$$

является объединением неприводимых компонент алгебраического множества $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ над полурешеткой L_l. Тогда

1. *точка P принадлежит всем множествам Y_σ тогда и только тогда, когда $P = (a, a, \ldots, a)$ для некоторого $a \in L_l$;*

2. $$Y_\sigma \setminus \bigcup_{\sigma' \neq \sigma} Y_{\sigma'} = \{P_\sigma\}$$
   (это означает, что разложение (1) избыточно, то есть каждая точка множества $Y \setminus \bigcup_\sigma \{P_\sigma\}$ принадлежит по крайней мере двум неприводимым компонентам);

3. *все неприводимые компоненты множества Y изоморфны друг другу;*

4. *$|Y_\sigma| = \binom{2l-1}{l}$ для произвольного σ.*

Кроме того, в главе 5.4 мы находим среднее число неприводимых компонент алгебраических множеств над L_l, заданных уравнениями ровно от n переменных.

В главе 6 мы изучаем уравнения над полурешетками и находим полурешетку порядка n, над которой число несовместных уравнений от m переменных максимально (минимально). Кроме того, в этой же главе показано (теорема 6.7), что наиболее вероятным решением случайно выбранного уравнения от одной переменной над произвольной полурешеткой ранга $n \geq 6$ будет пустое множество.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному консультанту Владимиру Никаноровичу Ремесленникову.

0 Предварительные сведения

0.1 Предварительные сведения из теории полугрупп

Следуя книгам [45, 55, 111], приведём основные определения теории полугрупп.

Полугруппой называется непустое множество с определённой на нём ассоциативной операцией $(x, y) \mapsto xy$. Определённая на полугруппе операция называется *умножением*. Полугруппа называется *моноидом*, если в ней существует элемент e (единица) такой, что $xe = ex = x$ для любого элемента x. Элемент $0 \in S$ является *нулем* полугруппы S, если $x0 = 0x = 0$ для всех $x \in S$.

Пусть a — произвольный элемент полугруппы S. *Период* n элемента a — это число элементов в подполугруппе, порожденной элементом a. Для элемента a, имеющего период n, *индексом* называется минимальное такое число m такое, что $a^m = a^n$. Говорят, что элементы $a, b \in S$ *коммутируют* если $ab = ba$. Полугруппа *тривиальна*, если она содержит в точности один элемент.

Элемент $a \in S$ называется *идемпотентом*, если $aa = a$. Полугруппа S называется *связкой* (или *идемпотентой*), если все ее элементы являются идемпотентами. Связка S называется *прямоугольной*, если в полугруппе S выполнено тождество $xyz = xz$.

Полугруппа *нигде не коммутативна*, если любая пара ее различных элементов не коммутирует. Для нигде не коммутирующих полугрупп справедлива следующая теорема.

Теорема 0.1. *Полугруппа S является нигде не коммутативной тогда и только тогда, когда S — прямоугольная связка.*

Подмножества в полугруппе *Центр* полугруппы S — это множество всех элементов $z \in S$, которые коммутируют со всеми элементами полугруппы.

Множество I элементов полугруппы S называется *левым (правым) идеалом*, если для любых элементов $s \in S$, $a \in I$ выполнено $sa \in I$ ($as \in I$). Идеал, являющийся одновременно левым и правым, называется *двусторонним* (или просто *идеалом*).

Полурешетки Связка называется *полурешеткой*, если она коммутативна, то есть для любой пары $x, y \in S$ выполнено $xy = yx$.

Поскольку полурешетки образуют многообразие, то для любого множества $\mathcal{I}$ существует свободная полурешетка $\mathcal{F}$, порожденная элементами $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Мощность множества $\mathcal{I}$ называется *рангом* свободной полурешетки $\mathcal{F}$, и, кроме того, будем считать, что множество $\mathcal{I}$ линейно упорядочено.

Ясно, что произвольный элемент $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$ допускает единственное представление в виде произведения

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{i_1}\mathbf{a}_{i_2}\ldots\mathbf{a}_{i_n},$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.

На элементах любой полурешетки можно определить частичный порядок $\leq$ следующим образом

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{bc} = \mathbf{b}.$$

Отношение $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ для элементов свободной полурешетки $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{F}$ означает, что любой порождающий $\mathbf{a}_i$, входящий в запись элемента $\mathbf{c}$, должен входить и в запись элемента $\mathbf{b}$. Например, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 \leq \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3$.

С помощью $\mathcal{F}^1$ мы будем обозначать свободную полурешетку $\mathcal{F}$ с присоединенным максимальным элементом 1 (то есть $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ для всех $x \in \mathcal{F}^1$).

Два элемента $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{F}$ будем называть *взаимно простыми* если

$$\mathbf{b} = \prod_{i \in \mathcal{I}_\mathbf{b}} \mathbf{a}_i, \ \mathbf{c} = \prod_{i \in \mathcal{I}_\mathbf{c}} \mathbf{a}_i,$$

и $\mathcal{I}_\mathbf{b} \cap \mathcal{I}_\mathbf{c} = \emptyset$. Иными словами, элементы $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{F}$ взаимно просты, если не существует такого $\mathbf{d} \in \mathcal{F}$, что $\mathbf{b} \leq \mathbf{d}$, $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$. Например, элементы $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4$ взаимно просты. При рассмотрении элементов полурешетки $\mathcal{F}^1$ будем считать, что ее максимальный элемент 1 взаимно прост с любым элементом полурешетки $\mathcal{F}^1$.

Следующее утверждение хорошо известно в теории полурешеток.

Теорема 0.2. *Любая конечно порожденная полурешетка конечна и вложима в некоторую свободную полурешетку конечного ранга.*

Простые и вполне простые полугруппы Полугруппа S, имеющая единственный идеал $I = S$ называется *простой*. Простая полугруппа S называется *вполне простой*, если в ней существуют минимальные левые и правые идеалы. Несложно доказать, что любая простая конечная полугруппа вполне проста. Следующий результат (теорема Риса) является одним из центральных в теории полугрупп.

Теорема 0.3. *Для любой вполне простой полугруппы S существует группа G и множества I, Λ такие что, полугруппа S изоморфна множеству троек (λ, g, i), где*

$g \in G$, $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. Умножение на тройках (λ, g, i) определяется как

$$(\lambda, g, i)(\mu, h, j) = (\lambda, gp_{i\mu}h, j),$$

где $p_{i\mu} \in G$ — элемент матрицы $\mathbf{P}$, обладающей свойствами:

1. *матрица $\mathbf{P}$ состоит из $|I|$ строк и $|\Lambda|$ столбцов;*

2. *элементы матрицы $\mathbf{P}$ суть элементы группы G;*

3. *элементы первой строки и первого столбца равны $1 \in G$ (то есть матрица $\mathbf{P}$ нормализована).*

Будем говорить, что матрица $\mathbf{P}$ *не выраждена*, если в ней нет двух одинаковых столбцов или двух одинаковых строк.

В соответствии с теоремой 0.3 вполне простую полугруппу S будем обозначать с помощью четверки $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$. Заметим также, что число $|\Lambda|$ ($|I|$) равно количеству минимальных правых (левых) идеалов полугруппы S.

Из теоремы 0.3 следует, что вполне простая полугруппа S представляется в виде дизъюнктного объединения копий группы G. Очевидно, единицами максимальных подгрупп полугруппы S будут элементы $(\lambda, {p_{i\lambda}}^{-1}, i)$, $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. Тогда операция обращения $^{-1}$ в подгруппе, определенной индексами λ, i, определяется как

$$(\lambda, g, i)^{-1} = (\lambda, {p_{i\lambda}}^{-1} g^{-1} {p_{i\lambda}}^{-1}, i).$$

Известно, что класс вполне простых полугрупп (в языке с операцией обращения) является многообразием. Свободные объекты данного многообразия характеризуются следующей теоремой.

Теорема 0.4. [12, 85] *Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_{i\lambda} | i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ — конечные множества букв, где $I = \Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через $F(X \cup Y)$ свободную группу, порожденную множеством $X \cup Y$. Тогда свободная вполне простая полугруппа $F_{css}(X)$, порожденная множеством X, задается следующей четверкой $F_{css} = (F(X \cup Y), \mathbf{P}, I, \Lambda)$, где $\mathbf{P} = (y_{i\lambda})$ и отображением $x_i \to (i, x_i, i)$.*

Нетрудно проверить, что свободная вполне простая полугруппа ранга 1 изоморфна свободной группе ранга 1.

В многообразии вполне простых полугрупп можно ввести операцию свободного произведения. Структура свободного произведения двух вполне простых полугрупп приведена в следующей теореме.

Теорема 0.5. [47] *Пусть полугруппа $S = S_1 * S_2$ является свободным произведением вполне простых полугрупп $S_1 = (G_1, \mathbf{P}_1, \Lambda_1, I_1)$, $S_2 = (G_2, \mathbf{P}_2, \Lambda_2, I_2)$. Тогда S имеет представление $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$, где*

1. *множества индексов Λ, I равны дизъюнктным объединениям соответствующих множеств полугрупп S_1, S_2;*

2. *пусть*

$$Y = \{y_{i\lambda} | i \in I_1, \lambda \in \Lambda_2 \text{ или } i \in I_2, \lambda \in \Lambda_1\},$$

тогда элементы матрицы $\mathbf{P} = (p_{i\lambda})$ определяются как

$$p_{i\lambda} = \begin{cases} y_{i\lambda}, \text{ если } i \in I_1, \lambda \in \Lambda_2 \text{ или } i \in I_2, \lambda \in \Lambda_1 \\ p_{i\lambda}^{(1)}, \text{ если } i \in I_1, \lambda \in \Lambda_1 \\ p_{i\lambda}^{(2)}, \text{ если } i \in I_2, \lambda \in \Lambda_2 \end{cases}$$

где через $p_{i\lambda}^{(j)}$ обозначен элемент матрицы $\mathbf{P}_j$ с индексами i, λ.

3.

$$G = G_1 * G_2 * F(Y),$$

где $F(Y)$ — свободная группа, порожденная множеством Y.

Очевидно, что любая группа G обладает единственным левым и правым идеалом, которые совпадают с G. Следовательно, верно следующее утверждение.

Следствие 0.6. *Вполне простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является группой тогда и только тогда, когда $|\Lambda| = |I| = 1$.*

Числа $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$ элемента (λ, g, i) вполне простой полугруппы $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ будем называть *первым* и *вторым* индексом соответственно.

Минимальный идеал (в конечных полугруппах он всегда существует) полугруппы S называется *ядром* и обозначается $Ker(S)$. Ядро всегда является простой полугруппой. Если ядро полугруппы S является группой, то S называется *гомогруппой*. Следующая теорема содержит все необходимые нам сведения о строении гомогрупп.

Теорема 0.7. (см. доказательство в [55]) *В гомогруппе S единица ядра $Ker(S)$ является идемпотентом (то есть $e^2 = e$) и коммутирует со всем элементами полугруппы S.*

Инверсные полугруппы

Полугруппа S называется *инверсной*, если для любого элемента $s \in S$ существует единственный элемент s^{-1} такой, что $ss^{-1}s = s$, $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$. Все нужные нам свойства инверсных полугрупп приведены в следующей теореме.

Теорема 0.8. *Пусть $E = \{e \in S | ee = e\}$ — множество идемпотентов инверсной полугруппы S. Тогда*

1. *все элементы множества E коммутируют между собой, то есть идемпотенты инверсной полугруппы образуют полурешетку;*

2. *$ss^{-1} \in E$;*

3. *для любых $e \in E$, $s \in S$ выполнено $ses^{-1} \in E$;*

4. *если $|E| = 1$, то S — группа.*

Из свойств идемпотентов легко следует формула для обращения произведения:

$$(st)^{-1} = t^{-1}s^{-1}.$$

Определим на парах идемпотентов $e, f \in E$ инверсной полугруппы S частичный порядок как

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = e.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество, и $T(\mathcal{M})$ — семейство всех частичных инъективных отображений $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Введем обозначения для области определения и образа частичного инъективного отображения

$$\mathbf{dom}(f) = \{\mu \in \mathcal{M} | f \text{ определена для элемента } \mu\},$$

$$\mathbf{im}(f) = \{\mu \in \mathcal{M} | \exists \eta \in \mathcal{M} | \text{такой, что } \eta f = \mu\}.$$

Лемма 0.9. *Частичные инъективные отображения обладают следующими свойствами:*

1. *если отображение $f \in T(\mathcal{M})$ идемпотентно (то есть $ff = f$), то $\mathbf{dom}(f) = \mathbf{im}(f)$ и $\mu f = \mu$ для всех $\mu \in \mathbf{dom}(f)$;*

2. *для любого* $f \in T(\mathcal{M})$ *отображение* ff^{-1} *идемпотентно и* $\mathbf{dom}(ff^{-1}) = \mathbf{dom}(f)$*;*

3. *для идемпотентных отображений* $e, f \in T(\mathcal{M})$ *верно* $\mathbf{dom}(ef) = \mathbf{dom}(e) \cap \mathbf{dom}(f)$*;*

4. *частичный порядок* $\leq$ *на идемпотентах инверсной полугруппы* $T(\mathcal{M})$ *интерпретируется как*

$$e \leq f \Leftrightarrow \mathbf{dom}(e) \subseteq \mathbf{dom}(f).$$

С помощью $f|_g$, где $f, g \in T(\mathcal{M})$, будем обозначать сужение отображения f на множество $\mathbf{dom}(g)$.

Следующая теорема решает проблему представления инверсных полугрупп.

Теорема 0.10. (Вагнер, Престон) *Любая инверсная полугруппа* S *вкладывается в* $T(\mathcal{M})$ *при подходящем множестве* $\mathcal{M}$.

Клиффордовы полугруппы

Полугруппа S называется *клиффордовой (вполне регулярной)*, если она равна объединению своих максимальных подгрупп. Очевидно, для каждого элемента s клиффордовой полугруппы S однозначно определен обратный элемент s^{-1} (как обратный элемент в максимальной подгруппе, содержащей s). Известно, что любая вполне простая полугруппа является клиффордовой полугруппой.

Пусть Ω — полурешетка. Тогда дизъюнктное объединение полугрупп $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ называется *полурешеткой полугрупп*, если для любой пары $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \leq \beta$ существует гомоморфизм $\psi_{\alpha,\beta} \colon S_\beta \to S_\alpha$ такой, что

1. для всех $\alpha \in \Omega$ гомоморфизм $\psi_{\alpha,\alpha}$ является тождественным;

2. $\psi_{\alpha,\beta} \circ \psi_{\beta,\gamma} = \psi_{\alpha,\gamma}$ для всех $\alpha \leq \beta \leq \gamma$;

3. $\psi_{\gamma\beta,\gamma} \circ \psi_{\gamma,\alpha} = \psi_{\gamma\beta,\beta} \circ \psi_{\beta,\alpha}$ для всех $\beta, \gamma \leq \alpha$;

4. умножение на элементах $s_1 \in S_\alpha$, $s_2 \in S_\beta$ полугруппы S определяется как

$$s_1 s_2 = \psi_{\alpha\beta,\alpha}(s_1)\psi_{\alpha\beta,\beta}(s_2). \tag{2}$$

Следующая теорема описывает строение клиффордовых полугрупп.

Теорема 0.11. [13] *Любая клиффордова полугруппа изоморфна полурешетке вполне простых полугрупп.*

0.2 Предварительные сведения из теории булевых алгебр

Следуя книге [67], приведем основные сведения о булевых алгебрах.

Булевой алгеброй называется непустое множество A с определенными на нем операциями объединения $\vee$, пересечения $\cdot$, дополнения $^-$ и выделенными элементами $0, 1$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

1. $a \vee b = b \vee a$, $ab = ba$ (коммутативность);
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность);
3. $a \vee (bc) = (a \vee b)(a \vee c)$, $a(b \vee c) = ab \vee ac$ (дистрибутивность);
4. $a \vee (ab) = a$, $a(a \vee b) = a$ (правило поглощения);
5. $a \vee \bar{a} = 1$, $a \cdot \bar{a} = 0$ (свойства дополнения).

Из аксиом выводятся следующие тождества, справедливые для любой булевой алгебры

1. $a \vee a = a$, $aa = a$ (идемпотентность);
2. $a \vee 0 = a$, $a \cdot 1 = a$;
3. $a \vee 1 = 1$, $a \cdot 0 = 0$;
4. $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$;
5. $\overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b}$, $\overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$ (законы де Моргана);
6. $\overline{\overline{a}} = a$;

Введем операцию сложения как

$$x + y = x\overline{y} \vee \overline{x}y, \tag{3}$$

для которой справедливо следующее утверждение.

Предложение 0.12. *Булева алгебра $\mathcal{B}$ относительно операций $+, \cdot$ является коммутативным кольцом, в котором выполнены тождества $x+x=0$, $xx=x$. Операции булевой алгебры $\vee, ^{-}$ выражаются через операции булева кольца $+, \cdot$ следующим образом*

$$\bar{x} = x+1,\ x \vee y = xy + x + y.$$

На элементах булевой алгебры можно определить частичный порядок как

$$x \leq y \Longleftrightarrow xy = x.$$

Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *полной*, если произвольное множество ее элементов имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань относительно определенного выше частичного порядка $\leq$. Заметим, что из существования точной нижней грани для всех подмножеств $\{b_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ следует существование точной верхней грани для любого подмножества $\{b_i | i \in I\}$ и наоборот. Кроме того, мы будем говорить, что подалгебра $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ *полна в* $\mathcal{B}$ если произвольное множество элементов алгебры $\mathcal{C}$ имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань (рассматриваемые в алгебре $\mathcal{B}$), и эти грани принадлежат $\mathcal{C}$.

Наряду с символом $\cdot$ для обозначения произведения нескольких элементов ниже будет использоваться символ $\bigwedge$. Например, запись $\bigwedge_{i \in I} b_i$ будет обозначать произведение элементов b_i, чьи нижние индексы принадлежат множеству I.

Поскольку класс булевых алгебр является многообразием, то для него определено понятие свободной булевой алгебры. Следуя [67], мы приведем одно из эквивалентных определений свободной булевой алгебры конечного ранга.

Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *свободной булевой алгеброй ранга r*, если существуют порождающие алгебру $\mathcal{B}$ элементы $b_1, b_2, \ldots, b_r$ такие, что все произведения

$$\bigwedge_{i \in I} b_i \cdot \bigwedge_{j \in J} \bar{b}_j\ (I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}, I \cap J = \emptyset)$$

не равны 0 в алгебре $\mathcal{B}$.

Следующее утверждение содержит основные структурные результаты о булевых алгебрах.

Предложение 0.13.

1. *Любая конечно порожденная булева алгебра конечна.*

2. *Любая конечная булева алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого конечного множества M. Следовательно,*

   (a) $|\mathcal{B}| = 2^{|M|}$*;*

   (b) *$\mathcal{B}$ изоморфна декартовой $|M|$-ой степени двухэлементной алгебры $\{0,1\}$;*

   (c) *все конечные булевы алгебры одинаковой мощности изоморфны друг другу;*

3. *Конечная свободная булева алгебра ранга r имеет мощность 2^{2^r}.*

4. *(Теорема Стоуна) Любая булева алгебра изоморфна алгебре всех открыто-замкнутых множеств некоторого компактного вполне несвязного хаусдорфова топологического пространства.*

0.3 Предварительные сведения из теории моделей

Приведем, следуя книге [61], необходимые нам понятия теории моделей (некоторые базовые понятия, такие как тождество и представление алгебраической системы с помощью порождающий и соотношений, в тексте не определяются, но могут быть найдены любой книге по универсальной алгебре).

Набор функциональных символов $\mathcal{L} = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$ с указанием их местности $n_1, n_2, \ldots$ ($n_i \in \mathbb{N}$) мы будем называть *функциональным языком* (далее просто *языком*). Функциональный символ $f_i^{(0)}$ нулевой местности называется *константным символом*, и далее для константных символов мы не будем указывать их местность с помощью верхнего индекса. *Алгебраической системой* $\mathcal{A} = \langle A \mid \mathcal{L} \rangle$ языка $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-*алгеброй*) называется непустое множество A, на котором каждому функциональному символу $f_i^{(n_i)} \in \mathcal{L}$ соответствует функция $f_i^{\mathcal{A}} \colon A^{n_i} \to A$ (константному символу $f_i^{(0)}$ соответствует некоторый элемент множества A). Функцию $f_i^{\mathcal{A}}$ мы будем называть *интерпретацией* функционального символа $f_i^{(n_i)} \in \mathcal{L}$. Множество A алгебраической системы $\mathcal{A}$ называется *универсумом* или *основным множеством*. В случае $|A| = 1$ алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *тривиальной*.

Введем соглашение: для $\mathcal{L}$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A \mid \mathcal{L} \rangle$ выражения вида $a \in \mathcal{A}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ будут соответственно обозначать $a \in A$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$.

Приведем определения основных классов алгебраических систем, которые будут использоваться в диссертации. Кроме того, в указанных ниже примерах мы зафиксируем обозначения для языков, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_s = \{\cdot^{(2)}\}$ называется *полугруппой*, если на $\mathcal{A}$ выполнено тождество
$$(xy)z = x(yz). \tag{4}$$

2. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_g = \{\cdot^{(2)}, {}^{-1(1)}, 1\}$ называется *группой*, если на $\mathcal{A}$ выполнены известные тождества теории групп

3. Полугруппу $\mathcal{A}$, рассматриваемую в языке $\mathcal{L}_{s-inv} = \{\cdot^{(2)}, {}^{-1(1)}\}$, мы будем называть *полугруппой с обращением.* Как следует из определений, любую инверсную и клиффордову полугруппу можно рассматривать в языке $\mathcal{L}_{s-inv}$ (см. подробности ниже).

4. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}$ называется *инверсной полугруппой*, если на ней выполнено тождество ассоциативности (4) а также тождества
$$x = xx^{-1}x,\ x = (x^{-1})^{-1},\ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1},\ xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}xx^{-1}. \tag{5}$$

5. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}$ называется *клиффордовой полугруппой*, если на ней выполнено тождество ассоциативности (4) а также тождества
$$x = xx^{-1}x,\ x = (x^{-1})^{-1},\ xx^{-1} = x^{-1}x. \tag{6}$$

6. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}$ называется *вполне простой полугруппой*, если на ней выполнено тождество ассоциативности (4) а также тождества
$$x = xx^{-1}x,\ x = (x^{-1})^{-1},\ xx^{-1} = x^{-1}x,\ xx^{-1} = (xyx)(xyx)^{-1}. \tag{7}$$

7. Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_b = \{\vee^{(2)}, \cdot^{(2)}, \bar{}^{(1)}, 0, 1\}$ называется *булевой алгеброй*, если на $\mathcal{A}$ выполнены аксиомы, указанные в параграфе 0.2.

Рассмотрим следующую теоретико-модельную конструкцию, которую будем неоднократно использовать ниже. Пусть $\mathcal{A}$ является алгеброй языка $\mathcal{L}$ и рассмотрим расширенный язык
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L} \cup \{a \mid a \in \mathcal{A}\}, \tag{8}$$
который получается из $\mathcal{L}$ добавлением новых константных символов $\{a \mid a \in \mathcal{A}\}$ соответствующих элементам алгебры $\mathcal{A}$. Новые константные символы допускают

естественную интерпретацию в алгебре $\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}$ можно рассматривать как $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-алгебру.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A \mid \mathcal{L} \rangle$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B} = \langle B \mid \mathcal{L} \rangle$ называется *подалгеброй*, если $B \subseteq A$, все функциональные символы языка $\mathcal{L}$ интерпретируются на $\mathcal{B}$ как сужение на подмножество B функций алгебры $\mathcal{A}$:

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

и множество B замкнуто относительно применения функций $f^{\mathcal{B}}$.

Из определения следует, что любая подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ должна содержать все элементы множества A, отмеченные в $\mathcal{A}$ как константы (так как константы являются нуль-местными функциями). Очевидно, что в многообразии полугрупп (булевых алгебр) понятию подалгебры соответствует известное понятие подполугруппы (булевой подалгебры).

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A \mid \mathcal{L} \rangle$ языка $\mathcal{L}$ *конечно порождена*, если существует конечное множество элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ может быть получен как результат суперпозиции функций алгебры $\mathcal{A}$, где в качестве аргументов используются элементы a_i и константы алгебры $\mathcal{A}$. *Заметим, что в соответствии с определением, любая алгебра $\mathcal{A}$, в которой все элементы отмечены как константы, является конечно порожденной.*

Пусть $\mathcal{A} = \langle A \mid \mathcal{L} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B \mid \mathcal{L} \rangle$ — две алгебры языка $\mathcal{L}$. Отображение $\phi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом*, если для любого функционального символа $f^{(n)} \in \mathcal{L}$ выполнено

$$\phi(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_n)).$$

В частности, для константных символов $c \in \mathcal{L}$ выполняется $\phi(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$, то есть *константы должны отображаться в константы.* Множество всех гомоморфизмов между алгебрами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ обозначается через $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Гомоморфизм $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-алгебр называется *вложением*, если $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$ для всех $a_1 \neq a_2$, $a_i \in \mathcal{A}$. Вложение с областью значений $\mathcal{B}$ называется *изоморфизмом* алгебраических систем.

Говорят, что $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ *аппроксимирует* (*дискриминирует*) $\mathcal{L}$-алгебру $\mathcal{B}$, если для любых различных элементов $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ (любого конечного набора различных элементов $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$) существует гомоморфизм $\mathcal{L}$-алгебр $\phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ такой, что $\phi(b_1) \neq \phi(b_2)$ ($\phi(b_i) \neq \phi(b_j)$ для всех $i \neq j$).

Введем определение *терма языка* $\mathcal{L}$ *(*$\mathcal{L}$*-терма) от переменных* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ следующим образом:

1. каждая переменная $x_i \in X$ является термом;
2. если $f^{(m)}$ — функциональный символ языка $\mathcal{L}$ и $t_1(X), t_2(X), \ldots, t_m(X)$ — термы языка $\mathcal{L}$, то выражение $f^{(m)}(t_1(X), t_2(X), \ldots, t_m(X))$ является термом.

Из определения следует, что любой константный символ (как функциональный символ местности 0) является термом языка $\mathcal{L}$.

Замечание 0.14. *Иными словами,* $\mathcal{L}$*-терм — это суперпозиция переменных множества* X*, константных и функциональных символов языка* $\mathcal{L}$*.*

Как следует из определения, $\mathcal{L}$-термы могут быть сколь угодно сложными выражениями. Например, для языка $\mathcal{L}_{s-inv}$ следующие выражения являются термами:

$$(((x_1)^{-1})^{-1})^{-1},\ (((x_1)x_2)^{-1}x_3)^{-1}$$

Однако для многих многообразий алгебр вид термов может быть существенно упрощен.

Пусть V — некоторое многообразие $\mathcal{L}$-алгебр. $\mathcal{L}$-термы $t(X), s(X)$ называются *эквивалентными над* V, если тождество $t(X) = s(X)$ выполнено в любой алгебре многообразия V.

Приведем примеры упрощения термов в различных многообразиях алгебр. В следующей группе примеров все термы зависят от множества переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1. V =**многообразие групп**. Используя аксиомы теории групп, легко показать, что каждый $\mathcal{L}_g$-терм эквивалентен над V произведению переменных в целых степенях
$$x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \ldots x_{i_m}^{k_m}\ (k_j \in \mathbb{Z}). \tag{9}$$
2. V =**многообразие полугрупп**. Поскольку умножение в любой полугруппе ассоциативно, то любой $\mathcal{L}_s$-терм эквивалентен над V терму, не содержащему скобок:
$$x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \ldots x_{i_m}^{k_m}\ (k_j \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

3. V =**многообразие идемпотентных полугрупп**. Легко проверить, что каждый $\mathcal{L}_s$-терм эквивалентен над V выражению вида

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}. \tag{11}$$

4. V =**многообразие полурешеток**. Поскольку полурешетка является коммутативной идемпотентной полугруппой, то выражение (11) может быть упрощено с помощью упорядочения переменных в терме:

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\ (i_1 < i_2 < \dots < i_k). \tag{12}$$

5. V =**многообразие прямоугольных связок**. Напомним, что прямоугольная связка — это идемпотетная полугруппа, удовлетворяющая тождеству $xyz = xz$. Следовательно, выражение (11) эквивалентно над V выражению $x_{i_1}x_{i_k}$. Иными словами, любой терм языка $\mathcal{L}_s$ эквивалентен над V терму, содержащему в своей записи не более двух букв.

6. V =**многообразие инверсных полугрупп**. Поскольку для инверсных полугрупп выполнены тождества

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, (x^{-1})^{-1} = x,$$

то любой $\mathcal{L}_{s-inv}$-терм эквивалентен над V выражению вида

$$x_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}\dots x_{i_m}^{k_m}\ (k_j \in \mathbb{Z}). \tag{13}$$

7. V =**многообразие клиффордовых полугрупп**. Поскольку для клиффордовых полугрупп (в то числе и для вполне простых полугрупп) не выполнено тождество

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1},$$

то над клиффордовыми полугруппами мы не можем эквивалентным образом раскрывать скобки в термах, и поэтому для $\mathcal{L}_{s-inv}$-термов над клиффордовыми полугруппами не существует нормальной формы вида (13).

Введем определения универсальных классов, которые будут использоваться при изложении основ универсальной алгебраической геометрии.

Универсальной формулой языка $\mathcal{L}$ называется формула без свободных переменных эквивалентная выражению

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{14}$$

где φ — бескванторная формула.

Квазитождеством языка $\mathcal{L}$ называется универсальная формула, в которой подформула φ имеет вид

$$(t_1(X) = s_1(X)) \wedge (t_2(X) = s_2(X)) \wedge \ldots \wedge (t_m(X) = s_m(X)) \to (t(X) = s(X)),$$

где $t_i(X), s_i(X), t(X), s(X)$ — термы языка $\mathcal{L}$, зависящие от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра языка $\mathcal{L}$. *Квазимногообразие* $\mathrm{qvar}(\mathcal{A})$ *(универсальное замыкание* $\mathrm{ucl}(\mathcal{A})$*)* — это класс всех $\mathcal{L}$-алгебр $\mathcal{B}$ таких, что на $\mathcal{B}$ истинно любое квазитождество (универсальная формула), истинное на алгебре $\mathcal{A}$.

Поскольку любое квазитождество является универсальной формулой, то имеем включение классов $\mathrm{ucl}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{qvar}(\mathcal{A})$.

Предмногообразие $\mathrm{pvar}(\mathcal{A})$, порождённое $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, — это наименьший класс алгебр, содержащий алгебру $\mathcal{A}$ и замкнутый относительно декартовых степеней и подалгебр.

0.4 Предварительные сведения из универсальной алгебраической геометрии

Данный параграф содержит базовые понятия универсальной алгебраической геометрии и формулировки объединяющих теорем. С доказательствами всех приведённых ниже результатов можно ознакомиться в работах [19, 20, 21] и монографии [29].

Основные определения универсальной алгебраической геометрии *Уравнением над языком $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-уравнением)* называется равенство двух $\mathcal{L}$-термов

$$t(X) = s(X). \tag{15}$$

Заметим, что, в соответствии с теорией моделей, уравнение — это фактически атомарная формула функционального языка $\mathcal{L}$.

Системой $\mathcal{L}$-уравнений ($\mathcal{L}$-системой) называется произвольное множество $\mathcal{L}$-уравнений, которые в совокупности зависят от конечного множества переменных X. Система $\mathcal{L}$-уравнений. зависящая от множества переменных X обозначается как $\mathbf{S}(X)$.

Пусть $\mathcal{A}$ является $\mathcal{L}$-алгеброй и $\mathbf{S}(X)$ — это система $\mathcal{L}$-уравнений от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Точка $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathcal{A}^n$ называется *решением* системы $\mathbf{S}(X)$ если замена $x_i = p_i$ превращают каждое из уравнений системы $\mathbf{S}(X)$ в истинное равенство в $\mathcal{L}$-алгебре $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}(X)) \subseteq \mathcal{A}^n$ множество всех решений $\mathcal{L}$-системы $\mathbf{S}(X)$.

Если $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) = \emptyset$, то система $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ называется *несовместной* над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$.

$\mathcal{L}$-система $\mathbf{S}_1$ *эквивалентна над* $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-системе $\mathbf{S}_2$ если

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_1) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_2).$$

Эквивалентные системы уравнений мы будем обозначать через $\mathbf{S}_1 \sim_{\mathcal{A}} \mathbf{S}_2$.

Множество $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ называется *алгебраическим* над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, если существует $\mathcal{L}$-система уравнений $\mathbf{S}$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ такая, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) = Y$.

Пусть $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ — алгебраическое множество над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$. *Радикал* множества Y определяется как

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) = \{t(X) = s(X) | Y \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))\}.$$

Соответственно *радикал системы $\mathcal{L}$-уравнений* $\mathbf{S}$ полагается равным радикалу множества $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$.

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})).$$

Уравнения из радикала $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$ называются *следствиями* системы $\mathbf{S}$.

Множество $\mathcal{L}$-уравнений $[\mathbf{S}]$ называется *конгруэнтным замыканием* системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$, если $[\mathbf{S}]$ — минимальное по включению множество, содержащее $\mathbf{S}$ и удовлетворяющее следующим свойствам (ниже $t_i(X), s_i(X)$ являются $\mathcal{L}$-термами):

1. $t_1(X) = t_1(X) \in [\mathbf{S}]$ для любого $\mathcal{L}$-терма $t_1(X)$;

2. если $t_1(X) = t_2(X) \in [\mathbf{S}]$, то $t_2(X) = t_1(X) \in [\mathbf{S}]$;

3. если $t_1(X) = t_2(X) \in [\mathbf{S}]$, $t_2(X) = t_3(X) \in [\mathbf{S}]$, то $t_1(X) = t_3(X) \in [\mathbf{S}]$;

4. если $t_i(X) = s_i(X) \in [\mathbf{S}]$ $(1 \leq i \leq n)$ и язык $\mathcal{L}$ содержит n-местный функциональный символ $f^{(n)}$, то $f(t_1(X), t_2(X), \ldots, t_n(X)) = f(s_1(X), s_2(X), \ldots, s_n(X)) \in [\mathbf{S}]$.

Легко проверить, что для любой системы уравнений $\mathbf{S}$ выполнено включение

$$[\mathbf{S}] \subseteq \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}). \tag{16}$$

Радикал алгебраического множества Y обладает следующими свойствами.

Предложение 0.15. *Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \subseteq A^n$ — алгебраические множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, тогда*

1. *если $Y_i \subseteq Y_j$, то $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_i) \supseteq \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_j)$;*
2. *$Y_i = Y_j$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_i) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_j)$;*
3. *пусть множество $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$ является алгебраическим над $\mathcal{A}$, тогда*

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_i).$$

Непустое алгебраическое множество $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ называется *неприводимым*, если Y нельзя представить в виде конечного объединения алгебраических множеств Y_i:

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k,\ Y_i \neq Y.$$

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ является *нетеровой по уравнениям* если любая бесконечная система $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой своей конечной подсистеме $\mathbf{S}'$.

Замечание 0.16. *Согласно определению, любая бесконечная несовместная система $\mathbf{S}$ над нетеровой по уравнениям алгебраической системой $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ должна содержать конечную несовместную подсистему $\mathbf{S}'$. Влияние бесконечных несовместных систем на свойство нетеровости отражено в определении класса $\mathbf{N}_c$ (см. ниже).*

Теорема 0.17. *$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда над $\mathcal{A}$ не существует бесконечной убывающей цепочки алгебраических множеств*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$$

Алгебраическое множество Y над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ можно раскладывать в объединение других алгебраических множеств $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$, а затем повторять процесс разложения для множеств Y_i и т.д. Данный процесс может быть конечным (если в итоге будет получено представление Y в виде объединения неприводимых множеств) или бесконечным. Нетеровость по уравнениям алгебры $\mathcal{A}$ гарантирует конечность данного процесса.

Теорема 0.18. *Любое алгебраическое множество Y над нетеровой по уравнениям алгеброй $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ допускает представление в виде объединения*

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m, \tag{17}$$

где Y_i неприводимы, $Y_i \nsubseteq Y_j$ $(i \neq j)$ и данное представление единственно с точностью до перестановки множеств Y_i.

Алгебраические множества Y_i из теоремы 0.18 называются *неприводимыми компонентами* множества Y.

Согласно определению, множество $\mathcal{L}$-термов замкнуто относительно всех операций языка $\mathcal{L}$. Таким образом, множество всех $\mathcal{L}$-термов от переменных X в свою очередь является $\mathcal{L}$-алгеброй. Алгебру всех термов от переменных множества X будем обозначать через $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(X)$ и называть *термальной $\mathcal{L}$-алгеброй, порожденной множеством X.*

Пусть Y — алгебраическое множество над алгеброй $\mathcal{A}$, определенной системой уравнений от переменных X. Определим на алгебре $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(X)$ отношение эквивалентности $\sim_Y$:

$$t(X) \sim_Y s(X) \Leftrightarrow t(P) = s(P) \text{ для любой точки } P \in Y \Leftrightarrow t(X) = s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y).$$

Обозначим через $[t(X)]_Y$ класс эквивалентности терма $t(X)$ относительно отношения $\sim_Y$. Множество классов эквивалентности

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(Y) = \mathcal{T}(X)/ \sim_Y$$

называется *координатной $\mathcal{L}$-алгеброй алгебраического множества* Y (строго говоря, $\Gamma_{\mathcal{A}}(Y)$ — это фактор-алгебра термальной алгебры по отношению $\sim_Y$). На $\mathcal{L}$-алгебре $\Gamma_{\mathcal{A}}(Y)$ все функции языка $\mathcal{L}$ вычисляются “по представителям”. Например, если язык

$\mathcal{L}$ содержит бинарную функцию $\cdot$, то результат данной функции в $\Gamma_{\mathcal{A}}(Y)$ вычисляется как $[t(X)]_Y \cdot [s(X)]_Y = [t(X) \cdot s(X)]_Y$.

Замечание 0.19. *Из определения непосредственно следует, что координатная алгебра алгебраического множества Y над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ удовлетворяет всем тождествам, истинным на $\mathcal{A}$. Следовательно, координатная алгебра алгебраического множества над полугруппой (полурешеткой) обязательно сама будет полугруппой (полурешеткой).*

Из определения координатной алгебры следует ее представление с помощью порождающих и определяющих соотношений

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(Y) = \langle X \mid \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) \rangle. \tag{18}$$

Из (18) следует, что все координатные алгебры конечно порождены. Кроме того, представление (18) позволяет ответить на вопрос: когда некоторая конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого алгебраического множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$.

Предложение 0.20. *Конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B}$, заданная представлением*

$$\mathcal{B} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid R \rangle,$$

является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда конгруэнтное замыкание множества R совпадает с радикалом $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(R)$ (здесь R рассматривается как система $\mathcal{L}$-уравнений от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Алгебраические множества с изоморфными координатными алгебрами были описаны в [19]. Для этого было введено понятие *изоморфизма алгебраических множеств* (формальное определение см. в [19]) и было доказано следующее утверждение.

Предложение 0.21. *Алгебраические множества $Y \subseteq \mathcal{A}^n, Z \subseteq \mathcal{A}^m$ имеют изоморфные координатные алгебры тогда и только тогда, когда множества Y, Z изоморфны. Кроме того, неприводимое алгебраическое множество может быть изоморфно только неприводимым алгебраическим множествам.*

Координатную $\mathcal{L}$-алгебру $\mathcal{B}$, которой соответствует неприводимое алгебраическое множество над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ будем называть *неприводимой*. Данное определение корректно, поскольку всем изоморфным копиям алгебры $\mathcal{B}$ соответствуют неприводимые алгебраические множества над $\mathcal{A}$.

Основная задача алгебраической геометрии над $\mathcal{L}$-полугруппой $\mathcal{A}$ заключается в описании и классификации всех алгебраических множеств над $\mathcal{A}$. Согласно третьему пункту утверждения 0.15, классификация алгебраических множеств эквивалентна описанию радикалов систем уравнений. Однако для многих $\mathcal{L}$-алгебр полное описание алгебраических множеств является достаточно сложной задачей. В этом случае основная задача алгебраической геометрии заменяется на классификацию координатных $\mathcal{L}$-алгебр над $\mathcal{A}$. Так как координатная $\mathcal{L}$-алгебра определяет алгебраическое множество с точностью до изоморфизма, то классификация координатных $\mathcal{L}$-алгебр даёт описание алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ лишь с точностью до изоморфизма.

Две $\mathcal{L}$-алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ называются *геометрически эквивалентными*, если для любой системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ координатные $\mathcal{L}$-алгебры множеств $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_1}(\mathbf{S})$, $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{S})$ изоморфны друг другу (иными словами, радикалы $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}_1}(\mathbf{S})$, $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{S})$ состоят из одних и тех же уравнений). Из данного определения следует, что если будет получено описание всех координатных $\mathcal{L}$-алгебр алгебраических множеств над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}_1$, то автоматически будут описаны все координатные алгебры алгебраических множеств над любой $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}_2$ геометрически эквивалентной $\mathcal{A}_1$.

Следующая теорема была доказана в [68] для групп, но без труда переносится на случай произвольной алгебраической системы.

Теорема 0.22. [68] *Алгебры языка $\mathcal{L}$ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{pvar}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{pvar}(\mathcal{A}_2).$$

Объединяющие теоремы В [19] были сформулированы так называемые Объединяющие теоремы, которые содержат семь эквивалентных подходов к описанию координатных алгебр над нетеровой по уравнениям алгеброй $\mathcal{A}$.

Приведем полные формулировки данных теорем (все неизвестные читателю определения могут быть найдены в [19, 20]).

Теорема 0.23. *Пусть $\mathcal{A}$ является нетеровой по уравнениям $\mathcal{L}$-алгеброй. Тогда для конечно порожденной алгебры $\mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathcal{B}$ является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{A}$;*
2. *$\mathcal{B}$ аппроксимируется $\mathcal{A}$;*
3. *$\mathcal{B}$ вкладывается в декартову степень $\mathcal{A}$;*
4. *$\mathcal{B} \in \mathrm{qvar}(\mathcal{A})$;*
5. *$\mathcal{B}$ принадлежит предмногообразию, порожденному алгеброй $\mathcal{A}$;*
6. *$\mathcal{B}$ является подпрямым произведением конечного числа предельных над $\mathcal{A}$ алгебр;*
7. *$\mathcal{B}$ определяется полным атомарным типом теории $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$ в языке $\mathcal{L}$;*

Теорема 0.24. *Пусть $\mathcal{A}$ является нетеровой по уравнениям $\mathcal{L}$-алгеброй. Тогда для конечно порожденной алгебры $\mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathcal{B}$ является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$;*
2. *$\mathcal{B}$ дискриминируется $\mathcal{A}$;*
3. *$\mathcal{B}$ вкладывается в ультрастепень алгебры $\mathcal{A}$;*
4. *$\mathcal{B} \in \mathrm{ucl}(\mathcal{A})$;*
5. *$\mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{B})$;*
6. *$\mathcal{B}$ является предельной над $\mathcal{A}$ алгеброй;*
7. *$\mathcal{B}$ определяется полным атомарным типом теории $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A})$ в языке $\mathcal{L}$;*

В своей работе мы будем использовать только пункты 1,2,4 теорем 0.23, 0.24.

Для произвольной (не обязательно нетеровой по уравнениям) $\mathcal{L}$-алгебры $\mathcal{A}$ справедливы лишь некоторые из пунктов теорем 0.23, 0.24:

Теорема 0.25. *Для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B}$ является координатной $\mathcal{L}$-алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ аппроксимируется алгеброй $\mathcal{A}$.*

2. *Конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B}$ является координатной $\mathcal{L}$-алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ дискриминируется алгеброй $\mathcal{A}$.*

3. *Если конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B}$ является координатной $\mathcal{L}$-алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B} \in \mathrm{qvar}(\mathcal{A})$.*

4. *Если конечно порожденная $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{B}$ является координатной $\mathcal{L}$-алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B} \in \mathrm{ucl}(\mathcal{A})$.*

Классы компактности Фактически Объединяющие теоремы 0.23, 0.24 остаются верными не только для нетеровых по уравнениям алгебр. В связи с этим в [21] были введены следующие два обобщения понятия нетеровости по уравнениям.

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется q_ω-*компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнения $t(X) = s(X)$ такого, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X)).$$

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется u_ω-*компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнений $\{t_i(X) = s_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}$ таких, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X))$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)).$$

Обозначим через $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{U}$ классы всех нетеровых по уравнениям, q_ω-компактных и u_ω-компактных алгебр языка $\mathcal{L}$ соответственно. Из определений легко следует, что $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{U} \subseteq \mathbf{Q}$.

Теорема 0.26. [21]. *Для $\mathcal{L}$-алгебры $\mathcal{B}$ справедлива теорема 0.23 (теорема 0.24) тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{B}$ является q_ω-компактной (u_ω-компактной).*

С помощью следующего определения можно сформулировать необходимое условие принадлежности классам $\mathbf{U}, \mathbf{Q}$.

Систему $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ мы будем называть *E_k-системой*, если $|\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})| = k$, но для любой конечной подсистемы $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ выполнено $|\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})| = \infty$. В частности, E_0-система — это бесконечная несовместная система уравнений, у которой каждая конечная подсистема совместна.

Теорема 0.27. [52] *Если $\mathcal{A} \in \mathbf{Q}$ ($\mathcal{A} \in \mathbf{U}$), то над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ не существует E_k-систем для всех $k \in \{0, 1\}$ ($k \in \mathbb{N}$).*

Кроме того, для q_ω-компактных алгебр справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.28. [21] *Для любой q_ω-компактной булевой $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}$ справедливо равенство классов*

$$\mathrm{qvar}(\mathcal{B}) = \mathrm{pvar}(\mathcal{B}).$$

В своей работе, помимо q_ω- и u_ω-компактных $\mathcal{L}$-алгебр, мы будем рассматривать ещё два обобщения понятия нётеровости на уравнениям.

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *нетеровой по совместным системам*, если для любой *совместной* системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ существует эквивалентная ей конечная подсистема. Класс всех нетеровых по совместным системам $\mathcal{L}$-алгебр обозначим через $\mathbf{N}_c$.

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *слабо нетеровой*, если для любой системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ существует эквивалентная ей конечная система $\mathbf{S}_0$ (здесь мы уже не требуем, чтобы система $\mathbf{S}_0$ являлась бы подсистемой системы $\mathbf{S}$). Класс всех слабо нетеровых $\mathcal{L}$-алгебр обозначим через $\mathbf{N}'$.

Включения классов $\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathbf{U}, \mathbf{Q}$ можно наглядно изобразить с помощью следующего рисунка (см. подробности в [21]).

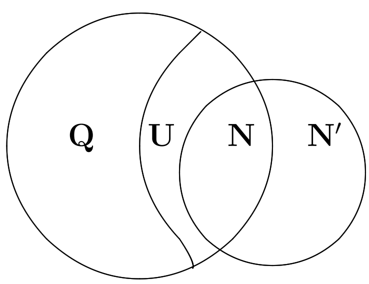


Рисунок 1.

Эквациональные области Следуя [22], дадим следующее определение. $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *ко-областью*, если все непустые алгебраические множества над $\mathcal{A}$

неприводимы. Диаметрально противоположным понятием к понятию ко-области является определение эквациональной области: алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется *эквациональной областью*, если любое конечное объединение алгебраических множеств $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$ является алгебраическим множеством.

Класс эквациональных областей в языке $\mathcal{L}$ описывается с помощью следующей теоремы.

Теорема 0.29. [22] *Алгебра $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда множество точек*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{A}^4 \mid x_1 = x_2 \text{ или } x_3 = x_4\} = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(x_1 = x_2) \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(x_3 = x_4) \quad (19)$$

является алгебраическим над $\mathcal{A}$.

Утверждение теоремы 0.29 приводит к следующему соображению: *поскольку при переходе от языка $\mathcal{L}$ к $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ расширяется класс уравнений и алгебраических множеств, то вполне возможна ситуация, когда множество M (19) не является алгебраическим над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, но над $\mathcal{A}$, рассматриваемой в языке $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ множество M уже алгебраическое.*

Приведем необходимые нам результаты об эквациональных областях вглассе групп.

Теорема 0.30. [22] *Группа G языка $\mathcal{L}_g$ или $\mathcal{L}_g(G)$ является эквациональной областью тогда и только тогда, когда множество*

$$\mathcal{M}_{gr} = \{(x_1, x_2) | x_1 = 1 \text{ или } x_2 = 1\} \subseteq G^2$$

является алгебраическим, то есть существует система $\mathbf{S}$ *от переменных x_1, x_2 с решением $\mathcal{M}_{gr}$.*

Критерий 0.30 можно сформулировать и в более простом виде, используя следующее понятие. Элемент $x \neq 1$ группы G называется *делителем нуля*, если существует $1 \neq y \in G$ такой, что для всех элементов $g \in G$ выполнено $[x, y^g] = 1$ (здесь $y^g = gyg^{-1}$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$).

Теорема 0.31. [22] *Группа G языка $\mathcal{L}_g(G)$ является эквациональной областью тогда и только тогда, в ней нет делителей нуля.*

Из теоремы 0.31 следуют утверждения о свойствах свободных объектов в категории групп.

Следствие 0.32. [22] *Пусть G — свободная неабелева группа, тогда G является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_g(G)$ (Данный результат был впервые получен Г. Гуревичем, доказательство приведено, например, в [57]).*

Следствие 0.33. [22] *Любое свободное произведение $G = G_1 * G_2$ (кроме случая свободного произведения двух циклических групп порядка 2) является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_g(G)$.*

С другой стороны в [22] было доказано, что все нетривиальные группы (как алгебраические системы в языке без констант $\mathcal{L}_g = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$) не являются эквациональными областями.

1 Основы алгебраической геометрии над булевыми алгебрами

1.1 Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая булева алгебра, которую, очевидно, можно рассматривать как алгебраическую систему языков $\mathcal{L}_b$ и $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$. Однако $\mathcal{C}$ является не единственной алгеброй языка $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$: алгебраической системой языка $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$ будет являться, например, любая *булева алгебра $\mathcal{B}$, в которой подалгебра, порожденная константами языка $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$ изоморфна алгебре $\mathcal{C}$*. Условимся далее такие булевы алгебры $\mathcal{B}$ называть *$\mathcal{C}$-алгебрами* и рассматривать из в языке $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$.

Для изучения свойств q_ω- и u_ω-компактных булевых $\mathcal{C}$-алгебр нам понадобятся следующие простые утверждения, приведенные без доказательства.

Лемма 1.1. *Пусть уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ и конечная система уравнений $\{\tau_i(Z) = \sigma_i(Z) | 1 \leq i \leq l\}$ от переменных $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ обладают изоморфными другу другу множествами решений, и для каждого уравнения $\tau_i(Z) = \sigma_i(Z)$ выполнено*

$$\tau_i(Z) = \sigma_i(Z) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}(Z)).$$

Тогда $\tau(X) = \sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}(X))$, где система уравнений $\mathbf{S}(Z)$ получена из $\mathbf{S}(X)$ заменой переменных множества Z на X.

Лемма 1.2. *Пусть для системы уравнений $\mathbf{S}$ над алгеброй $\mathcal{B}$ и произвольных множеств $M_1, M_2, \dots, M_m \subseteq \mathcal{B}^n$ выполнено включение*

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} M_i$$

и кроме того для каждого множества M_i существует конечная подсистема $\mathbf{S}'_i \subseteq \mathbf{S}$ со свойством $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}'_i) \subseteq M_i$. Тогда для конечной подсистемы $\mathbf{S}' = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{S}'_i$ выполнено

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} M_i$$

1.2 Преобразование уравнений над булевыми алгебрами

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечный набор переменных. Введем новые переменные $Z = \{z_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$, которые будут индексироваться элементами множества $\{0,1\}^n$.

($|Z| = 2^n$). С помощью $\pi_i(\alpha)$ ($1 \le i \le n$) будем обозначать проекцию набора α на i-ую координату. Заменим переменные $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ на переменные множества Z по правилу

$$x_i = \bigvee_{\pi_i(\alpha)=1} z_\alpha. \tag{20}$$

Лемма 1.3. *Свободная булева алгебра $\mathcal{F}_n$, порожденная множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ изоморфна булевой алгебре $\mathcal{F}_Z$, порожденной множеством $Z = \{z_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$ с соотношениями*

$$z_\alpha z_\beta = 0, \ (\forall \alpha, \beta \ \alpha \neq \beta) \tag{21}$$

$$\bigvee_{\alpha \in \{0,1\}^n} z_\alpha = 1 \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — 2^n-ая декартова степень двухэлементной булевой алгебры $\{0,1\}$. Очевидно, что элементы алгебры $\mathcal{B}$ можно представлять в виде наборов из нулей и единиц, индексированных множеством $\{\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$. Легко проверить, что отображение, ставящее в соответствие элементу z_α элемент алгебры $\mathcal{B}$, состоящий из $2^n - 1$ нулей и одной единицы, расположенной в позиции α, является изоморфизмом.

Поскольку $|\mathcal{B}| = 2^{2^n}$, то в соответствии с третьим пунктом утверждения 0.13 $\mathcal{B}$ является свободной алгеброй ранга r. Следовательно, по пункту 2.c утверждения 0.13 алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна $\mathcal{F}_n$. ◄

Замена переменных обратная к замене (20) задается формулой

$$z_\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_2}, \tag{23}$$

где $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \{0,1\}$ и

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i \text{ если } a_i = 1, \\ \overline{x}_i \text{ если } a_i = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Замечание 1.4. *В качестве индексов переменных из множества Z мы будем использовать только греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ По этой причине произведения и объединения вида*

$$\bigvee_{\alpha \in \{0,1\}^n} z_\alpha, \quad \bigwedge_{\alpha \in \{0,1\}^n} z_\alpha$$

для краткости будем обозначать

$$\bigvee_{\alpha} z_\alpha, \ \bigwedge_{\alpha} z_\alpha$$

Пусть $\tau(X) = \sigma(X)$ — произвольное уравнение над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{B}$. По утверждению 0.12 уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ эквивалентно уравнению $\tau(X)+\sigma(X) = 0$. Из определения операции $+$ получаем $\tau(X)\overline{\sigma(X)} \vee \sigma(X)\overline{\tau(X)} = 0$, откуда уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} \tau(X)\overline{\sigma(X)} = 0, \\ \sigma(X)\overline{\tau(X)} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, преобразование уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$ сводится к преобразованию уравнения вида $\tau(X) = 0$.

Итак, имеем уравнение $\tau(X) = 0$. По формуле (20) заменим все переменные в терме $\tau(X)$ на переменные множества Z. Пользуясь законами де Моргана и дистрибутивностью операций $\vee, \cdot$, получим представление терма $\tau(X)$ в виде объединения

$$\tau(X) = \bigvee_{i=1}^{m} \mathbf{c}_i (\bigwedge_{\alpha \in I_i} z_\alpha \bigwedge_{\beta \in J_i} \bar{z}_\beta), \tag{25}$$

Пусть $\tau_i(X) = \mathbf{c}_i(\bigwedge_{\alpha \in I_i} z_\alpha \bigwedge_{\beta \in J_i} \bar{z}_\beta)$. Поскольку для переменных из множества Z выполнено соотношение (21), то термы $\tau_i(X)$ могут быть только двух типов

$$\tau_i(X) = \mathbf{c}_i z_{\alpha_i} (\bigwedge_{\beta \in J_i} \bar{z}_\beta), \tag{26}$$

$$\tau_i(X) = \mathbf{c}_i (\bigwedge_{\beta \in J_i} \bar{z}_\beta). \tag{27}$$

Также из соотношения (21) следует

$$z_{\alpha_i} z_\beta = 0 \Leftrightarrow z_{\alpha_i}(\bar{z}_\beta + 1) = 0 \Leftrightarrow z_{\alpha_i}\bar{z}_\beta + z_{\alpha_i} = 0 \Leftrightarrow z_{\alpha_i}\bar{z}_\beta = z_{\alpha_i}.$$

Последнее равенство позволяет выражения вида

$$z_{\alpha_i} \bigwedge_{\beta \in I,} \bar{z}_\beta$$

заменить на z_{α_i}. Следовательно, термы $\tau_i(X)$ вида (26) эквивалентны $\mathbf{c}_i z_{\alpha_i}$.

Преобразуем термы вида (27). Пользуясь законами де Моргана и формулой (22), имеем

$$\bigwedge_{\beta \in J_i} \bar{z}_\beta = \overline{\bigvee_{\beta \in J_i} z_\beta} = \bigvee_{\beta \notin J_i} z_\beta.$$

Следовательно, терм $\tau_i(X)$ вида (27) эквивалентен выражению

$$\tau_i(X) = \mathbf{c}_i(\bigvee_{\beta \notin J_i} z_\beta)$$

Преобразовав термы $\tau_i(X)$, мы получаем равенство

$$\tau(X) = \bigvee_{i=1}^{m} \mathbf{c}_i z_{\alpha_i}.$$

Таком образом, уравнение $\tau(X) = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\{\mathbf{c}_\alpha z_\alpha = 0 | \alpha \in \{0,1\}^n\},$$

которая в свою очередь эквивалентна системе

$$\{z_\alpha \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}.$$

Таким образом, любое уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{B}$ можно представить в виде конечной системы уравнений

$$\mathbf{S}_{\tau=\sigma} = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\} \cup \{z_\alpha z_\beta = 0 | \alpha \neq \beta\} \cup \{\bigvee_\alpha z_\alpha = 1\} \tag{28}$$

Из представления уравнения в виде (28) следует представление произвольной системы в виде

$$\mathbf{S} = \bigcup_\alpha \mathbf{S}_\alpha \cup (30) \cup (31), \tag{29}$$

где $\mathbf{S}_\alpha = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\}$ и

$$\bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\}, \tag{30}$$

$$\{\bigvee_\alpha z_\alpha = 1\}. \tag{31}$$

1.3 Нетеровые по уравнениям булевы алгебры

Теорема 1.5. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathcal{C}$, порожденная константами, конечна.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $\mathcal{C}$ конечна. Тогда существует конечное число различных уравнений вида $z_\alpha \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$. Следовательно, все системы уравнений над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{B}$ конечны.

Пусть теперь алгебра $\mathcal{C}$ бесконечна. Из теории булевых алгебр следует, что в алгебре $\mathcal{C}$ существует бесконечная цепь элементов

$$\mathbf{c}_1 < \mathbf{c}_2 < \ldots < \mathbf{c}_n < \ldots$$

Тогда легко проверяется, что бесконечная система уравнений $\mathbf{S} = \{x \geq \mathbf{c}_1, x \geq \mathbf{c}_2, \ldots, x \geq \mathbf{c}_n, \ldots\}$ не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме. ◀

Теорема 1.6. *Если булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ нетерова по совместным системам уравнений, то $\mathcal{B}$ нетерова по уравнениям.*

Доказательство. В соответствии с представлением системы $\mathbf{S}$ в виде (29) достаточно показать, что любая система $\mathbf{S}_\alpha = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Но поскольку каждая система $\mathbf{S}_\alpha$ совместна ($0 \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}_\alpha)$), то по условию она эквивалентна своей конечной подсистеме $\mathbf{S}'_\alpha$.

Следовательно, система $\mathbf{S}$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\mathbf{S}' = \bigcup_\alpha \mathbf{S}'_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \{\bigvee_\alpha z_\alpha = 1\},$$

и поэтому булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ нетерова по уравнениям. ◀

Таким образом, в классе булевых $\mathcal{C}$-алгебр мы имеем равенство классов $\mathbf{N} = \mathbf{N}_c$

1.4 Слабая нетеровость по уравнениям

Теорема 1.7. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ слабо нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$, то есть любое множество элементов $\{\mathbf{c}_j|j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ имеет точную нижнюю грань в алгебре $\mathcal{B}$, и эта точная нижняя грань принадлежит подалгебре $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если множество констант $\{\mathbf{c}_j|j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ не имеет точной нижней грани в $\mathcal{B}$ или же его точная нижняя грань принадлежит множеству $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, то система $\mathbf{S} = \{x \leq \mathbf{c}_j|j \in J\}$ имеет ненулевое решение в $\mathcal{B}$.

Поскольку булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ слабо нетерова по уравнениям, то существует система уравнений

$$\mathbf{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}'_j|j \in J'\} \cup \{\bar{x} \leq \mathbf{c}''_j|j \in J''\}$$

от одной переменной, которая эквивалентна $\mathbf{S}$. Очевидно, что система $\mathbf{S}_0$ эквивалентна системе из двух уравнений $\{x \leq \mathbf{c}'\} \cup \{\bar{x} \leq \mathbf{c}''\}$, где

$$\mathbf{c}' = \bigwedge_{j \in J'} \mathbf{c}'_j, \ \mathbf{c}'' = \bigwedge_{j \in J''} \mathbf{c}''_j.$$

Поскольку элемент 0 является решением системы $\mathbf{S}$, то и $0 \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}_0)$. Следовательно, $\mathbf{c}'' = 1$, и уравнение $\bar{x} \leq \mathbf{c}''$ становится тривиальным. Таким образом, система $\mathbf{S}_0$ эквивалентна уравнению $x \leq \mathbf{c}'$.

Поскольку $\mathbf{c}' \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}_0)$, то $\mathbf{c}' \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S})$. Следовательно, $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}_j$ для любого $j \in J$. Так как элемент $\mathbf{c}'$ не является точной нижней гранью множества $\{\mathbf{c}_j|j \in J\}$, то существует элемент $b \in \mathcal{B}$ такой, что $\mathbf{c}' < b < \mathbf{c}_j$ для всех $j \in J$.

Поскольку элемент b не больше всех констант $\mathbf{c}_j$, то по определению системы $\mathbf{S}$ имеем $b \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S})$. С другой стороны, $b \notin \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}_0)$ (так как $\mathbf{c}' < b$). Следовательно, система $\mathbf{S}_0$ не эквивалентна $\mathbf{S}$.

Докажем достаточность. Пусть алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$ и система $\mathbf{S}$ имеет вид (29).

Обозначим через $\mathbf{c}_\alpha \in \mathcal{C}$ точные нижние грани множеств $\{\mathbf{c}_i|i \in I_\alpha\}$. Получаем, что $\mathbf{S}$ эквивалентна конечной системе

$$\bigcup_{\alpha}\{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta}\{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \{\bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1\},$$

и поэтому булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ слабо нетерова по уравнениям. ◄

1.5 q_ω- и u_ω-компактность булевых алгебр

С помощью $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ будем обозначать точку, координаты которой p_α являются значениями переменных z_α.

Пусть координаты точки $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ являются элементами булевой $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}$. Произвольным образом линейно упорядочим индексы $\alpha \in \{0,1\}^n$, минимальный и максимальный индекс обозначим соответственно через ω, ω'. Определим точку $Q = (q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ как

$$q_\alpha = \begin{cases} p_\omega, \ \alpha = \omega \\ p_\alpha \bigwedge_{\beta<\alpha} \bar{p}_\beta, \ \alpha \neq \omega \end{cases} . \tag{32}$$

Точку Q будем называть *расщеплением точки P с первой координатой ω*. Расщепление точки обладает следующими свойствами.

Лемма 1.8. *Для расщепления $Q = (q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ точки $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ с первой координатой ω выполнено:*

1. $q_\omega = p_\omega$;
2. $q_\alpha \leq p_\alpha$ *для всех* $\alpha \in \{0,1\}^n$;
3. $q_\alpha q_\gamma = 0$, *при* $\alpha \neq \gamma$;
4. $\bigvee_\alpha p_\alpha = \bigvee_\alpha q_\alpha$.

Доказательство. Первые два утверждения леммы следуют непосредственно из определения расщепления.

Докажем третье утверждение. Пусть $\alpha, \beta \neq \omega$, тогда

$$q_\alpha q_\beta = (p_\alpha \bigwedge_{\gamma<\alpha} \bar{p}_\gamma)(p_\beta \bigwedge_{\delta<\beta} \bar{p}_\delta)$$

Пусть $\alpha < \beta$ при заданном линейном упорядочении индексов. Тогда произведение $\bigwedge_{\delta<\beta} \bar{p}_\delta$ содержит $\bar{p}_\alpha$, и поэтому

$$q_\alpha q_\beta = (p_\alpha \bigwedge_{\gamma<\alpha} \bar{p}_\gamma)(p_\beta \bar{p}_\alpha \bigwedge_{\substack{\delta<\beta \\ \delta\neq\alpha}} \bar{p}_\delta) = p_\alpha \bar{p}_\alpha (\bigwedge_{\gamma<\alpha} \bar{p}_\gamma \bigwedge_{\substack{\delta<\beta \\ \delta\neq\alpha}} \bar{p}_\delta) = 0.$$

Осталось рассмотреть случай, когда ровно одна из координат α, β равна ω. Пусть для определенности $\alpha = \omega$, $\beta \neq \omega$. Тогда

$$q_\alpha q_\beta = p_\omega (p_\beta \bar{p}_\alpha \bigwedge_{\substack{\delta<\beta \\ \delta\neq\alpha}} \bar{p}_\delta) = p_\omega \bar{p}_\omega \bigwedge_{\substack{\omega<\delta<\beta \\ \delta\neq\alpha}} \bar{p}_\delta) = 0.$$

Докажем четвертое утверждение леммы. Пусть индексы ω, ω' являются минимальным и максимальным элементами при заданном линейном упорядочении индексов $\{\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$. Для произвольного γ докажем по индукции равенство

$$\bigvee_{\alpha\leq\gamma} q_\alpha = \bigvee_{\alpha\leq\gamma} p_\alpha. \tag{33}$$

Если $\gamma = \omega$, то имеем истинное равенство $q_\omega = p_\omega$. Допустим, что для всех $\gamma < \delta$ равенство (33) выполнено, докажем его для $\gamma = \delta$. В самом деле,

$$\bigvee_{\alpha\leq\delta} q_\alpha = \bigvee_{\alpha<\delta} q_\alpha \vee q_\delta = \bigvee_{\alpha<\delta} p_\alpha \vee p_\delta \bigwedge_{\beta<\delta} \bar{p}_\beta = (\bigvee_{\alpha<\delta} p_\alpha \vee p_\delta) \bigwedge_{\beta<\delta} (\bigvee_{\alpha<\delta} p_\alpha \vee \bar{p}_\beta) =$$

$$(\bigvee_{\alpha\leq\delta} p_\alpha) \bigwedge_{\beta<\delta} (\bigvee_{\substack{\alpha<\delta \\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha \vee p_\beta \vee \bar{p}_\beta) = (\bigvee_{\alpha\leq\delta} p_\alpha) \bigwedge_{\beta<\delta} (\bigvee_{\substack{\alpha<\delta \\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha \vee 1) = \bigvee_{\alpha\leq\delta} p_\alpha.$$

При $\gamma = \omega'$ равенство (33) доказывает утверждение леммы. ◀

Из леммы 1.8 мы получаем следующий результат о совместности систем уравнений над булевыми алгебрами.

Лемма 1.9. *Если над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй совместна система*

$$\mathbf{S}(Z) = \bigcup_\alpha \mathbf{S}_\alpha \cup \{\bigvee_\alpha z_\alpha = 1\}, \tag{34}$$

то совместна и система уравнений (29).

Доказательство. Пусть $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ — решение системы (34), и $Q = (q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ является расщеплением точки P с первой координатой ω.

Из третьего пункта леммы 1.8 следует, что $q_\alpha q_\beta = 0$, поэтому точка Q удовлетворяет уравнениям (30).

Поскольку для координат точки P выполнено равенство $\bigvee_\alpha p_\alpha = 1$, то по четвертому пункту леммы 1.8 имеем $\bigvee_\alpha q_\alpha = 1$. Следовательно, точка Q удовлетворяет уравнению (31).

Так как по второму утверждению леммы 1.8 $q_\alpha \leq p_\alpha$, то все неравенства систем $\mathbf{S}_\alpha$ для точки Q выполнены.

Таким образом, точка Q является решением системы уравнений (29). ◀

Теорема 1.10. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ q_ω-компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_0- и E_1-систем.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 0.27. Докажем достаточность.

Пусть $\mathbf{S}$ — система уравнений (29) над $\mathcal{B}$ и

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}) \tag{35}$$

для некоторого уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}$. Построим конечную подсистему $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}). \tag{36}$$

Если система $\mathbf{S}$ несовместна, то по условию существует несовместная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$, для которой, очевидно, выполнено включение (36).

Пусть теперь система $\mathbf{S}$ совместна, и точка $P = (p_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ — ее решение. Рассмотрим следующую систему уравнений от переменной x

$$\mathbf{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}\}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Система $\mathbf{S}_0$ имеет ненулевое решение $x_0 \neq 0$. Если допустить что $x_0 \leq p_\alpha$, то $x_0 \leq \mathbf{c}$, так как точка P удовлетворяет уравнению $z_\alpha \leq \mathbf{c}$. Поскольку элемент x_0 удовлетворят системе $\mathbf{S}_0$, то выполнено также $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}$. Однако, одновременное выполнение двух неравенств $x_0 \leq \mathbf{c}$ и $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}$ влечет $x_0 = 0$, что противоречит выбору элемента x_0.

   Таким образом, $x_0 \not\leq p_\alpha$.

   Определим точку $Q = (q_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ как

   $$q_\beta = \begin{cases} p_\beta, \ \beta \neq \alpha \\ p_\beta \vee x_0, \ \beta = \alpha. \end{cases}$$

   Ясно, что точка Q удовлетворяет всем системам $\mathbf{S}_\beta \subseteq \mathbf{S}$, $\beta \in \{0,1\}^n$, а также уравнению (31). Через $R = (r_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ обозначим расщепление точки Q с первой координатой α. С помощью леммы 1.9, получаем, что точка R является решением системы $\mathbf{S}$. Поскольку α является первой координатой расщепления, то $r_\alpha = q_\alpha$. Имеем,

$$r_\alpha \mathbf{c} = (p_\alpha \vee x_0)\mathbf{c} = p_\alpha \mathbf{c} \vee x_0 \mathbf{c} = p_\alpha \vee 0 = p_\alpha.$$

Поскольку $x_0 \nleq p_\alpha$, то $p_\alpha \neq r_\alpha$. Следовательно, $r_\alpha \nleq \mathbf{c}$, что противоречит включению (35).

2. Система $\mathbf{S}_0$ имеет единственное решение $x = 0$. Поскольку по условию над $\mathcal{B}$ не существует E_1-систем, то $\mathbf{S}_0$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\mathbf{S}_0' = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha'\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}\},\ |I_\alpha'| < \infty.$$

Равенство $\mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}_0') = \{0\}$ влечет

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot \bigwedge_{i \in I_\alpha'} \mathbf{c}_i = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I_\alpha'} \mathbf{c}_i \leq \mathbf{c}.$$

Из последнего неравенства следует, что для конечной подсистемы $\mathbf{S}' = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha'\} \subseteq \mathbf{S}_\alpha \subseteq \mathbf{S}$ выполнено включение (36).

Мы доказали, что для уравнений вида $z_\alpha \leq \mathbf{c}$ существует конечная подсистема $\mathbf{S}'$, для которой выполняется включение (36). Пусть теперь уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$, зависящее от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяет включению

$$\mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{B}(\tau(X) = \sigma(X)).$$

Уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ можно представить в виде системы $\mathbf{S}_{\tau=\sigma}$ вида (28). Поскольку для каждого уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathbf{S}_{\tau=\sigma}$ существует конечная подсистема $\mathbf{S}_\alpha' \subseteq \mathbf{S}_\alpha$ со свойством

$$\mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}_\alpha') \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{B}(z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha),$$

то по лемме 1.2 для конечной подсистемы $\mathbf{S}' = \bigcup_\alpha \mathbf{S}_\alpha' \subseteq \mathbf{S}$ выполнено

$$\mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_\mathcal{B}(\tau(X) = \sigma(X)).$$

Теорема доказана. ◄

Теорема 1.11. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ u_ω-компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_k-систем для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 0.27. Докажем достаточность.

Пусть $\mathbf{S}$ — система уравнений (29) над $\mathcal{B}$ и

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha). \tag{37}$$

Построим конечную подсистему $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha). \tag{38}$$

Если система $\mathbf{S}$ несовместна, то по условию существует несовместная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$, для которой, очевидно, выполнено включение (38).

Пусть теперь система $\mathbf{S}$ совместна, и точка $P = (p_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ — ее решение. Рассмотрим следующие системы уравнений ($\alpha \in \{0,1\}^n$) от переменной x

$$\tilde{\mathbf{S}}_\alpha = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha\}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Каждая система $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$ имеет ненулевое решение $\tilde{x}_\alpha \neq 0$. Поскольку $\tilde{x}_\alpha \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$, то $\tilde{x}_\alpha \mathbf{c}_\alpha = 0$. Можно считать, что все системы $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$ не эквивалентны всем своим конечным подсистемам (в противном случае мы заменяем все такие системы на эквивалентные им конечные подсистемы и продолжаем работать с неизмененными системами $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$).

   Поскольку над $\mathcal{B}$ не существует E_k-систем для любого $k \in \mathbb{N}$, каждая система $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$ имеет бесконечное множество решений.

   Построим точку $Q = (q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ для которой выполнено

   (a) $q_\alpha \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathbf{S}}_\alpha) \setminus \{0\}$;

   (b) $q_\alpha q_\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$;

   (c) $q_\alpha \tilde{x}_\alpha \neq 0$.

   Построение точки Q будем вести индукцией по числу систем $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$. Для этого произвольным образом линейно упорядочим множество индексов $\{0,1\}^n$, и ω — минимальный элемент относительно введенного порядка.

   База индукции. В случае одной системы $\tilde{\mathbf{S}}_\omega$ полагаем $q_\omega = \tilde{x}_\omega$.

   Предположение индукции. Предположим, для систем $\tilde{\mathbf{S}}_\alpha$, $\omega \leq \alpha < \omega'$ существует точка $Q' = (q'_\alpha | \omega \leq \alpha < \omega')$ с указанными выше свойствами.

Шаг индукции. Так как система $\tilde{\mathbf{S}}_{\omega'}$ имеет бесконечное число решений, то в качестве элемента $\tilde{x}_{\omega'}$ можно выбрать решение системы $\tilde{\mathbf{S}}_{\omega'}$ такое, что

$$\tilde{x}_{\omega'} \neq \bigvee_{\alpha \in K} q'_\alpha$$

для любого множества индексов $K \subseteq \{\beta | \beta < \omega'\}$.

Рассмотрим следующие случаи.

(a) $\bigvee_{\alpha<\omega'} q'_\alpha \not\geq \tilde{x}_{\omega'}$. Следовательно, элемент $\tilde{x}_{\omega'}\overline{\bigvee_{\alpha<\omega'} q'_\alpha}$ не равен 0. Точка Q, определяемая как

$$q_\alpha = \begin{cases} q'_\alpha, \ \alpha < \omega' \\ \tilde{x}_{\omega'}\overline{\bigvee_{\beta<\omega'} q'_\beta}, \ \alpha = \omega' \end{cases},$$

очевидно, удовлетворяет всем условиям.

(b) $\bigvee_{\alpha<\omega'} q'_\alpha > \tilde{x}_{\omega'}$. Без ограничения общности можно считать, что для всех $\alpha < \omega'$ выполнено $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} \neq 0$ (если бы для некоторых q'_α выполнялось бы равенство $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} = 0$, то мы их исключили бы из объединения $\bigvee_{\alpha<\omega'} q'_\alpha$ и далее рассматривали бы оставшиеся элементы q'_α).

Для некоторого номера $\alpha_0 < \omega'$ выполнено $q'_{\alpha_0}\tilde{x}_{\omega'} < q'_{\alpha_0}$ (если бы для всех α выполнялось $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} = q'_\alpha$, то $\bigvee_{\alpha<\omega'} q'_\alpha \leq \tilde{x}_{\omega'}$, что противоречит условию). Из неравенства $q'_{\alpha_0}\tilde{x}_{\omega'} < q'_\alpha$ следует $q'_\alpha \bar{\tilde{x}}_{\omega'} \neq 0$. Непосредственно проверяется, что точка Q с координатами

$$q_\alpha = \begin{cases} q'_\alpha, \ \alpha < \omega', \alpha \neq \alpha_0 \\ q'_{\alpha_0}\bar{\tilde{x}}_{\omega'}, \ \alpha = \alpha_0 \\ q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'}, \ \alpha = \omega' \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям.

Итак, точка Q с требуемыми свойствами построена. Заметим, что из неравенства $q_\alpha \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$ следует $q_\alpha \mathbf{c}_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Пусть координаты точки $R = (r_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ определены как

$$r_\alpha = (p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta) \vee q_\alpha.$$

Поскольку $p_\alpha \in \mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S})$ и $q_\alpha \in \mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}_\alpha)$, то $r_\alpha \in \mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S}_\alpha)$ (где система $\mathbf{S}_\alpha$ задана формулой (29)) для каждого $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Для $\alpha \neq \gamma$ имеем

$$r_\alpha r_\gamma = (p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee q_\alpha)(p_\gamma \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee q_\gamma) =$$

$$p_\alpha p_\gamma \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee p_\alpha[\bigwedge_\beta \bar{q}_\beta q_\gamma] \vee p_\gamma[q_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta] \vee q_\alpha q_\gamma = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0.$$

Следовательно, точка R удовлетворяет уравнениям (30).

Вычислим

$$\bigvee_\alpha r_\alpha = \bigvee_\alpha (p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee q_\alpha) = \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \bigvee_\alpha p_\alpha \vee \bigvee_\alpha q_\alpha = \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \cdot 1 \vee \bigvee_\alpha q_\alpha =$$

$$\bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee \bigvee_\alpha q_\alpha = \bigwedge_\beta (\bar{q}_\beta \vee \bigvee_\alpha q_\alpha) = \bigwedge_\beta (\bar{q}_\beta \vee q_\beta \vee \bigvee_{\alpha \neq \beta} q_\alpha) = \bigwedge_\beta 1 = 1.$$

Таким образом, точка R удовлетворяет уравнению (31) и поэтому $R \in \mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S})$.

В соответствии с включением (37) существует α, для которого выполняется неравенство $r_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$. Имеем,

$$r_\alpha \mathbf{c}_\alpha = (p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee q_\alpha)\mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha \vee 0 = p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha.$$

Поскольку $r_\alpha \mathbf{c}_\alpha = r_\alpha$, то имеем равенство

$$p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \vee q_\alpha. \tag{39}$$

Так как $p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha \leq p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta$, равенство (39) влечет соотношения

$$p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta,$$

$$q_\alpha \leq p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha. \tag{40}$$

Однако последнее неравенство невозможно, так как выражение $\bigwedge_\beta \bar{q}_\beta$ содержит $\bar{q}_\alpha$, и, следовательно, $q_\alpha(p_\alpha \bigwedge_\beta \bar{q}_\beta \mathbf{c}_\alpha) = 0 \neq q_\alpha$.

Таким образом, мы получаем, что точка $R \in \mathrm{V}_\mathcal{B}(\mathbf{S})$ не удовлетворяет ни одному из неравенств $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$, что противоречит включению (37).

2. Существует система $\tilde{\mathbf{S}}_\beta$ такая, что $\mathrm{V}_\mathcal{B}(\tilde{\mathbf{S}}_\beta) = \{0\}$. Поскольку по условию над $\mathcal{B}$ не существует E_1-систем, то $\tilde{\mathbf{S}}_\beta$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\tilde{\mathbf{S}}'_\beta = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I'_\beta\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}_\beta\},\ |I'_\beta| < \infty.$$

Равенство $\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathbf{S}}'_\beta) = \{0\}$ влечет

$$\bar{\mathbf{c}}_\beta \bigwedge_{i\in I'_\beta} \mathbf{c}_i = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I'_\beta} \mathbf{c}_i \le \mathbf{c}_\beta.$$

Из последнего неравенства следует, что для конечной подсистемы $\mathbf{S}' = \{z_\alpha \le \mathbf{c}_i | i \in I'_\beta\} \subseteq \mathbf{S}_\beta \subseteq \mathbf{S}$ выполнено включение (38).

Рассмотрим теперь случай, когда в правую часть включения (37) входит несколько уравнений $\{z_\alpha \le \mathbf{c}_{i\alpha} | 1 \le i \le n_\alpha\}$, зависящих от общей переменной z_α, и пусть выполняется включение

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_\alpha \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \le \mathbf{c}_{i\alpha}). \tag{41}$$

Построим конечную подсистему $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_\alpha \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_\alpha \le \mathbf{c}_{i\alpha}). \tag{42}$$

Определим вспомогательную систему $\tilde{\mathbf{S}}$ следующим образом. Пусть системы $\mathbf{S}_{i\alpha}$ $(1 \le i \le n_\alpha)$ получаются из $\mathbf{S}_\alpha$ заменой переменной z_α на новую переменную $z_{i\alpha}$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{S}} = \bigcup_\alpha \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{S}_{i\alpha} \cup \bigcup_{\substack{\alpha\neq\beta\\ i\neq j}} \{z_{i\alpha} z_{j\beta} = 0\} \cup \{\bigvee_\alpha \bigvee_{i=1}^{n_\alpha} z_{i\alpha} = 1\}.$$

Покажем, что для системы $\tilde{\mathbf{S}}$ выполняется включение

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathbf{S}}) \subseteq \bigcup_\alpha \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_{i\alpha} \le \mathbf{c}_{i\alpha}). \tag{43}$$

Предположим противное, а именно: существует точка $\tilde{P} = (\tilde{p}_{i\alpha} | \alpha \in \{0,1\}^n, 1 \le i \le n_\alpha) \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathbf{S}})$ такая, что

$$\tilde{p}_{i\alpha} \nleq \mathbf{c}_{i\alpha} \tag{44}$$

для всех $\alpha \in \{0,1\}^n, 1 \le i \le n_\alpha$. Непосредственно проверяется, что точка $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$, где

$$p_\alpha = \bigvee_{i=1}^{n_\alpha} \tilde{p}_{i\alpha},$$

является решением системы $\mathbf{S}$. Тогда ввиду (41) существует $\beta \in \{0,1\}^n$ и $1 \le j \le n_\beta$ такие, что $p_\beta \le \mathbf{c}_{j\beta}$. Из определения координаты p_β получаем, что

$$\tilde{p}_{i\beta} \le \mathbf{c}_{j\beta}$$

для всех $1 \le i \le n_\beta$. Однако последнее неравенство противоречит (44).

Таким образом, для системы $\tilde{\mathbf{S}}$ выполняется (43), которое имеет вид включения (37). Поэтому для $\tilde{\mathbf{S}}$ справедливы все рассуждения, которые были приведены выше при доказательстве существования конечной подсистемы $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$, удовлетворяющей включению (38). Следовательно, существует конечная подсистема $\tilde{\mathbf{S}}' \subseteq \tilde{\mathbf{S}}$ такая, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathbf{S}}') \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_{i\alpha} \le \mathbf{c}_{i\alpha}). \tag{45}$$

Пусть $\mathbf{S}'$ — система уравнений от множества переменных $\{z_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$, получаемая из $\tilde{\mathbf{S}}'$ заменой всех переменных $z_{i\alpha}$ $(1 \le i \le n_\alpha)$ на z_α.

С помощью стандартных рассуждений легко проверяется, что система $\mathbf{S}'$ удовлетворяет включению (42).

Рассмотрим наиболее общий вид уравнений, входящих в правую часть включения (37).

Пусть даны уравнения $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$, $1 \le i \le m$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ удовлетворяющие включению

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)). \tag{46}$$

Перейдя к переменным $Z = \{z_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$, имеем

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{S}}_i), \tag{47}$$

где конечная система $\bar{\mathbf{S}}_i = \{z_\alpha \le \mathbf{c}_{\alpha i} | \alpha \in \{0,1\}^n\}$ вида (28) получена из уравнения $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$ с помощью замены переменных (20) (здесь мы не включаем в системы $\bar{\mathbf{S}}_i$ уравнения (30,31), поскольку данные уравнения входят в систему $\mathbf{S}$).

Используя дистрибутивность операции объединения множеств, множество $\bigcup_{i=1}^m \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\bar{\mathbf{S}}_i)$ можно представить в виде конечного пересечения множеств вида

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = V_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_1} \le \mathbf{c}_{\alpha_1}) \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_2} \le \mathbf{c}_{\alpha_2}) \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_m} \le \mathbf{c}_{\alpha_m}).$$

Таким образом, имеем включение

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcap_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Выше было доказано, что для каждого множества $M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ существует конечная подсистема $\mathbf{S}'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Тогда по лемме 1.2 для системы

$$\mathbf{S}' = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} \mathbf{S}'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

выполнено включение

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)).$$

Теорема доказана. ◄

1.6 Геометрическая эквивалентность булевых алгебр

Замечание 1.12. *Напомним, что согласно определению, $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ имеют изоморфные друг другу подалгебры констант $\mathcal{C}$.*

Теорема 1.13. *Две булевы $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *любая несовместная над $\mathcal{B}_1$ система уравнений несовместна над алгеброй $\mathcal{B}_2$ и наоборот;*

2. *точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_j | j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$ тогда и только тогда, когда она существует и равна 0 в $\mathcal{B}_2$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если булевы $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны, то для любой системы $\mathcal{C}$-уравнений $\mathbf{S}$ выполнено $\mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S}) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$. Если система $\mathbf{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_1$, то ее радикал совпадает с множеством всех $\mathcal{C}$-уравнений. Следовательно, радикал $\mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$ также содержит все $\mathcal{C}$-уравнения, и система $\mathbf{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_2$.

Если точная нижняя грань множества $\{\mathbf{c}_j | j \in J\}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$, то система $\mathbf{S} = \{x \leq \mathbf{c}_j | j \in J\}$ имеет единственное решение $x = 0$ над алгеброй $\mathcal{B}_1$. Следовательно, уравнение $x = 0$ принадлежит радикалу $\mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S})$. Из геометрической эквивалентности булевых $\mathcal{C}$-алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ следует $x = 0 \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$. Поэтому система $\mathbf{S}$ имеет над $\mathcal{B}_2$ единственное решение $x = 0$, и точная нижняя грань множества $\{\mathbf{c}_j | j \in J\}$ равна 0 в алгебре $\mathcal{B}_2$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathbf{S}$ — система $\mathcal{C}$-уравнений. Покажем, что для любого уравнения $\tau(X) = \sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S})$ выполнено также $\tau(X) = \sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$.

Приведем систему $\mathbf{S}$ к виду (29). Уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ при этом преобразуется к системе $\mathbf{S}_{\tau=\sigma}$ вида (28). Достаточно доказать, что каждое уравнение $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathbf{S}_{\tau=\sigma}$ принадлежит радикалу $\mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$.

Для произвольного уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathbf{S}_{\tau=\sigma}$ составим вспомогательную систему уравнений

$$\mathbf{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha\}. \tag{48}$$

Возможны следующие два случая.

1. $\mathrm{V}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S}_0) = \{0\}$.

   Следовательно, точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_i | i \in I_\alpha\} \cup \{\bar{\mathbf{c}}\}$ равна 0 в $\mathcal{B}_1$. По второму условию теоремы получаем, что и $\mathrm{V}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S}_0) = \{0\}$.

   Предположим, что существует точка $P = (p_\beta | \beta \in \{0,1\}^n) \in \mathrm{V}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$ такая, что $p_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$. Рассмотрим элемент $z_0 = p_\alpha \bar{\mathbf{c}}_\alpha$. Непосредственно проверяется, что z_0 является решением системы (48) над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{B}_2$. Но поскольку $p_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$, то $z_0 \neq 0$, что противоречит равенству $\mathrm{V}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S}_0) = \{0\}$. Следовательно, для всех решений $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ системы $\mathbf{S}$ выполнено $p_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$, откуда следует, что $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$

2. У системы $\mathbf{S}_0$ существует ненулевое решение $x_0 \in \mathcal{B}_1$. Пусть $P = (p_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n)$ — решение системы $\mathbf{S}$ над булевой $\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{B}_1$ (если система $\mathbf{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_1$, то по первому условию леммы система $\mathbf{S}$ несовместна и над $\mathcal{B}_2$ и, следовательно, выполняется равенство $\mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S}) = \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{S})$). Если допустить $x_0 \leq p_\alpha$, то $x_0 \leq \mathbf{c}_\alpha$, так как точка P удовлетворяет уравнению $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$. Поскольку элемент x_0 удовлетворят системе $\mathbf{S}_0$, то выполнено также $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$. Однако, одновременное выполнение двух неравенств $x_0 \leq \mathbf{c}_\alpha$ и $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$ влечет $x_0 = 0$, что противоречит выбору элемента x_0.

   Таким образом, $x_0 \not\leq p_\alpha$.

   Построим точку $Q = (q_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ следующим образом

$$q_\beta = \begin{cases} p_\beta, \ \beta \neq \alpha \\ p_\beta \vee x_0, \ \beta = \alpha. \end{cases}$$

   Ясно, что точка Q удовлетворяет всем системам $\mathbf{S}_\beta \subseteq \mathbf{S}$, $\beta \in \{0,1\}^n$, а также уравнению (31). Через $R = (r_\beta | \beta \in \{0,1\}^n)$ обозначим расщепление точки Q с первой координатой α. С помощью леммы 1.9, получаем, что точка R является решением системы $\mathbf{S}$. Поскольку α является первой координатой расщепления, то $r_\alpha = q_\alpha$. Имеем,

$$r_\alpha \mathbf{c}_\alpha = (p_\alpha \vee x_0)\mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \mathbf{c}_\alpha \vee x_0 \mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \vee 0 = p_\alpha \neq r_\alpha$$

   (здесь $x_0 \mathbf{c}_\alpha = 0$, так как из выбора точки x_0 имеем $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}_\alpha}$). Таким образом, $r_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$, и поэтому

$$\mathrm{V}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S}) \not\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{B}_1}(z_\alpha \leq \mathbf{c}),$$

откуда получаем $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha \notin \mathrm{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{S})$, что противоречит выбору уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$.

◄

2 Эквациональные области в классе полугрупп

2.1 Язык без констант

Предварительные замечания В данном параграфе мы рассматриваем полугруппы в “стандартном” языке без констант $\mathcal{L}_s = \{\cdot\}$. Таким образом, рассматриваемые термы имеют вид (10) и, например, следующие выражения $x_1x_2 = x_1$, $x_1^2x_2x_1 = x_2^3x_1$ являются $\mathcal{L}_s$-уравнениями.

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Любая нетривиальная полугруппа в языке $\mathcal{L}_s = \{\cdot\}$ не является эквациональной областью.*

Доказательство теоремы 2.1 будет происходить по следующему плану. Мы последовательно доказываем отсутствие нетривиальных эквациональных областей в следующих классах полугрупп:

1. идемпотентные полугруппы (лемма 2.2);
2. полугруппы, удовлетворяющие тождеству $x^2 = x^3$ (лемма 2.3);
3. полугруппы, в которых существует элемент a со свойством $a^2 \neq a^3$ (лемма 2.4).

Лемма 2.2. *Любая нетривиальная идемпотентная полугруппа S не является эквациональной областью.*

Доказательство. Обозначим множество из трех переменных x_1, x_2, x_3 через X и предположим, что множество

$$\mathcal{M} = \mathrm{V}_S(x_1 = x_2) \cup \mathrm{V}_S(x_1 = x_3) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 \text{ или } x_1 = x_3\}$$

является алгебраическим, то есть совпадает с решением системы $\mathbf{S}(X)$.

Возможны два случая.

1. Полугруппа S нигде не коммутативна. По теореме 0.1 S является прямоугольной связкой. Пусть a, b — два различных элемента полугруппы S, и $c = ab$. В силу тождества $xyz = xz$ и идемпотентности, имеем равенства $ac = c$, $ca = a$.

Поскольку $(a,c,c) \notin \mathcal{M}$, то в системе $\mathbf{S}(X)$ существует уравнение $\pi(X) = \rho(X)$, не удовлетворяющее данной точке. Так как множество $\{a,c\}$ образует подполугруппу в S, то значения термов $\pi(X)$, $\rho(X)$ в точке (a,c,c) принадлежат множеству $\{a,c\}$. Без ограничения общности будем считать, что $\pi(a,c,c) = a$, $\rho(a,c,c) = c$. Следовательно, терм $\pi(X)$ заканчивается на переменную x_1, в то время как терм $\rho(X)$ заканчивается либо на x_2 или x_3.

Тогда $\pi(a,a,c) = \pi(a,c,a) = a$, и либо $\rho(a,c,a) = c$ (если терм $\rho(X)$ заканчивается на переменную x_2), либо $\rho(a,a,c) = c$ (если терм $\rho(X)$ заканчивается на переменную x_3). В любом случае мы получаем противоречие, поскольку точки (a,a,c), (a,c,a) принадлежат множеству $\mathcal{M}$.

2. Пусть в полугруппе существуют два различных коммутирующих друг с другом элемента $a, b \in S$ и $c = ab$. Легко проверить, что элемент c обладает свойством $ac = ca = c$. Поскольку $(a,c,c) \notin \mathcal{M}$, то в системе $\mathbf{S}(X)$ существует уравнение $\pi(X) = \rho(X)$, не удовлетворяющее данной точке. Так как множество $\{a,c\}$ образует подполугруппу в S, то значения термов $\pi(X)$, $\rho(X)$ в точке (a,c,c) принадлежат множеству $\{a,c\}$. Без ограничения общности будем считать, что $\pi(a,c,c) = a$, $\rho(a,c,c) = c$. Следовательно, в терм $\pi(X)$ входит лишь переменная x_1, в то время как в $\rho(X)$ входит хотя бы одна из переменных x_2 или x_3.

   Тогда $\pi(a,a,c) = \pi(a,c,a) = a$, и либо $\rho(a,c,a) = c$ (если переменная x_2 входит в терм $\rho(X)$), либо $\rho(a,a,c) = c$ (если переменная x_3 входит в терм $\rho(X)$). В любом случае мы получаем противоречие, поскольку точки (a,a,c), (a,c,a) принадлежат множеству $\mathcal{M}$.

◄

Лемма 2.3. *Пусть в полугруппе S истинно тождество $x^2 = x^3$ и полугруппа S не идемпотентна. Тогда S не является эквациональной областью.*

Доказательство. Обозначим множество из трех переменных x_1, x_2, x_3 через X, и предположим, что множество

$$\mathcal{M} = \mathrm{V}_S(x_1 = x_2) \cup \mathrm{V}_S(x_1 = x_3) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 \text{ или } x_1 = x_3\}$$

является алгебраическим, то есть совпадает с решением системы $\mathbf{S}(X)$.

Поскольку полугруппа S не является идемпотентной, то существует элемент $a \in S$ такой, что $a \neq a^2$.

Поскольку $(a, a^2, a^2) \notin \mathcal{M}$, то в системе $\mathbf{S}(X)$ существует уравнение $\pi(X) = \rho(X)$, не удовлетворяющее данной точке. Так как множество $\{a, a^2\}$ образует подполугруппу в S, то значения термов $\pi(X)$, $\rho(X)$ в точке (a, a^2, a^2) принадлежат множеству $\{a, a^2\}$. Без ограничения общности будем считать, что $\pi(a, a^2, a^2) = a$, $\rho(a, a^2, a^2) = a^2$. Следовательно, $\pi(X) = x_1$, в то время как в терм $\rho(X)$ либо входит одна из переменных x_2, x_3, либо по крайне мере переменная x_1 входит два раза.

Тогда $\pi(a, a, a^2) = \pi(a, a^2, a) = a$, и либо $\rho(a, a^2, a) = a^2$, либо $\rho(a, a, a^2) = a^2$. В любом случае мы получаем противоречие, поскольку точки (a, a, a^2), (a, a^2, a) принадлежат множеству $\mathcal{M}$. ◀

Лемма 2.4. *Если полугруппа S не удовлетворяет тождеству $x^2 = x^3$, то она не является эквациональной областью.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Предположим противное: пусть решение системы $\mathbf{S}(X)$ равно множеству

$$\mathcal{M} = \mathrm{V}_S(x_1 = x_2) \cup \mathrm{V}_S(x_3 = x_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_2 \text{ или } x_3 = x_4\},$$

и $\tau(X) = \sigma(X)$ — произвольное уравнение системы $\mathbf{S}$. По условию существует элемент $a \in S$ такой, что $a^2 \neq a^3$ (и поэтому $a \neq a^2$).

Из выбора системы $\mathbf{S}$ следует, что точки

$$P_1 = (a^2, a, a, a),\ P_2 = (a, a, a^2, a)$$

удовлетворяют уравнению $\tau(X) = \sigma(X)$.

Пусть терм $\tau(X)$ содержит в себе n_i вхождений переменной x_i. Аналогично m_i — число вхождений переменной x_i в терм $\sigma(x)$. Равенства $\tau(P_i) = \sigma(P_i)$ влекут

$$\begin{cases} a^{2n_1+n_2+n_3+n_4} = a^{2m_1+m_2+m_3+m_4}, \\ a^{n_1+n_2+2n_3+n_4} = a^{m_1+m_2+2m_3+m_4}, \end{cases} \tag{49}$$

Перемножая уравнения системы (49), получаем равенство

$$a^{3n_1+2n_2+3n_3+2n_4} = a^{3m_1+2m_2+3m_3+2m_4}. \tag{50}$$

Рассмотрим точку $Q = (a^3, a^2, a^3, a^2) \notin \mathcal{M}$. Однако при подстановке координат точки Q в уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ получаем

$$\tau(Q) = a^{3n_1+2n_2+3n_3+2n_4},$$
$$\sigma(Q) = a^{3m_1+2m_2+3m_3+2m_4}.$$

Ввиду (50), имеем $\tau(Q) = \sigma(Q)$. Из произвольности выбора уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$ получаем, что $Q \in \mathrm{V}_S(\mathbf{S})$, что выбору системы $\mathbf{S}$. ◄

Таким образом, основной результат параграфа (теорема 2.1) напрямую следует из лемм 2.2, 2.3, 2.4.

2.2 Инверсные полугруппы

Предварительные замечания. Ниже мы будем работать в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\}$, где S — некоторая инверсная полугруппа. Из свойств инверсных полугрупп следует, что любой $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$-терм эквивалентен выражению вида (13), где некоторые вхождения переменных x_i заменены на константы $s \in S$. Таким образом, примерами $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$-уравнений над инверсными полугруппами могут слудить следующие выражения $x_1^2 x_2^2 = x_3^{-3} s$, $s_1 x_1^{-1} s_1 = x_2^{-2} s_2$.

Терм $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, следуя [96], называется *хорошим*, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. $t(x) = x$;

2. существуют константы $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ такие, что

$$t(x) = s_1 x s_1^{-1} s_2 x s_2^{-1} \dots s_n x s_n^{-1}.$$

Следующая лемма описывает свойства хороших термов.

Лемма 2.5. [96] *Пусть E — множество идемпотентов инверсной полугруппы S. Тогда*

1. *если $e \in E$, то $t(e) \in E$ для любого хорошего терма $t(x)$;*

2. *если $e, f \in E$ и терм $t(x)$ хороший, то $t(ef) = t(e)t(f)$;*

3. *если $e, f \in E$, $e \leq f$, тогда для любого хорошего терма $t(x)$ выполнено $t(e) \leq t(f)$;*

4. *для любого терма $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ существует хороший терм $t'(x)$ такой, что $t(e) = t'(e)$ для любого идемпотента $e \in E$;*

5. *для каждого терма $t(x, y)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ существует хорошие термы $t'(x), r'(y)$ и элемент $d \in S$ такие что $t(e, f) = t'(e) r'(f) d$ для всех идемпотентов $e, f \in E$.*

Лемма 2.6. *Пусть полурешетка идемпотентов E инверсной полугруппы S содержит два несравнимых элемента e, f, тогда S не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Доказательство.

Предположим, что существует система $\mathbf{S}(x)$ с решением

$$\mathrm{V}_S(\mathbf{S}) = \mathrm{V}_S(x = e) \cup \mathrm{V}_S(x = f). \tag{51}$$

Мы докажем, что точка ef удовлетворяет системе $\mathbf{S}$, и таким образом придем к противоречию.

Пусть $w(x) = w'(x)$ — произвольное уравнение системы $\mathbf{S}$. По лемме 2.5 существуют хорошие термы $t(x), t'(x)$ и элементы $d, d' \in S$ такие, что уравнение $w(x) = w'(x)$ эквивалентно $t(x)d = t'(x)d'$ над множеством E.

Из равенства (51) получаем

$$t(e)d = t'(e)d', \tag{52}$$

$$t(f)d = t'(f)d'. \tag{53}$$

По теореме 0.10 S является подполугруппой в $T(\mathcal{M})$, поэтому все элементы полугруппы можно рассматривать как частичные инъективные отображения множества $\mathcal{M}$. Покажем, что $w(ef) = w'(ef)$, то есть

$$t(e)t(f)d = t'(e)t'(f)d'. \tag{54}$$

Равенство (54) может быть нарушена в двух случаях:

Если множество $\mathbf{dom}(t(e)t(f)d)$ пусто, то элемент $t(e)t(f)d$ является нулем полугруппы S. Однако по следствию 2.34 (см. ниже) любая нетривиальная полугруппа с нулем не является эквациональной областью.

Следовательно, существует элемент $\mu \in \mathbf{dom}(t(e)t(f)d)$ (и поэтому $\mu \in \mathbf{dom}(t(e)d)$, $\mu \in \mathbf{dom}(t(f)d)$).

Из равенств (52,53) получаем $\mu d|_{t(e)} = \mu d'|_{t'(e)}$, $\mu d|_{t(f)} = \mu d'|_{t'(f)}$. Следовательно, $\mu d|_{t(e)t(f)} = \mu d'|_{t'(e)t'(f)}$. Откуда следует равенство (54). Таким образом, $ef \in \mathrm{V}_S(\mathbf{S})$, что противоречит выбору системы $\mathbf{S}$. ◀

Лемма 2.7. *Пусть множество идемпотентов E инверсной полугруппы S линейно упорядочено и $|E| > 1$. Тогда S не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Доказательство. Предположим, что существует система $\mathbf{S}(x, y)$ с решением

$$\mathrm{V}_S(\mathbf{S}) = \mathrm{V}_S(x = e) \cup \mathrm{V}_S(y = e), \tag{55}$$

где e — произвольный не минимальный идемпотент. Ниже мы докажем, что система $\mathbf{S}$ удовлетворяет точке (f,f), где f — произвольный идемпотент, меньший чем e.

Пусть $w(x,y)=w'(x,y)$ — произвольное уравнение системы $\mathbf{S}$. По лемме 2.5 существуют хорошие термы $t(x),t'(x),r(y),r'(y)$ и элементы $d,d'\in S$ такие, что уравнение $w(x,y)=w'(x,y)$ эквивалентно $t(x)r(y)d=t'(x)r'(y)d'$ над полурешеткой E.

По (55), мы имеем равенства

$$t(e)r(e)d=t'(e)r'(e)d', \tag{56}$$

$$t(e)r(f)d=t'(e)r'(f)d', \tag{57}$$

$$t(f)r(e)d=t'(f)r'(e)d'. \tag{58}$$

Предположим

$$t(f)r(f)d\neq t'(f)r'(f)d'. \tag{59}$$

Поскольку все идемпотенты линейно упорядочены, то можно считать, что

$$t(f)r(f)<t'(f)r'(f). \tag{60}$$

По теореме 0.10 S является подполугруппой в $T(\mathcal{M})$, поэтому все элементы полугруппы можно рассматривать как частичные инъективные отображения множества $\mathcal{M}$.

Имеем ровно два случая:

1. существует элемент $\mu\in\mathcal{M}$ такой, что $\mu\in\mathbf{dom}(t(f)r(f))$, но $\mu d\neq\mu d'$;

2. существует элемент $\mu\in\mathcal{M}$ со свойством $\mu\notin\mathbf{dom}(d|_{t(f)r(f)})$, $\mu\in\mathbf{dom}(d'|_{t\prime(f)r'(f)})$.

Рассмотрим первый случай. По лемме 2.5 мы имеем неравенства:

$$t(f)r(f)\leq t(e)r(e),$$
$$t'(f)r'(f)\leq t'(e)r'(e),$$

которые влекут включения:

$$\mathbf{dom}(t(f)r(f))\subseteq\mathbf{dom}(t(e)r(e)),$$
$$\mathbf{dom}(t'(f)r'(f))\subseteq\mathbf{dom}(t'(e)r'(e)),$$

Следовательно, $\mu\in\mathbf{dom}(t(e)r(e))\cap\mathbf{dom}(t'(e)r'(e))$. Так как $\mu d\neq\mu d'$, мы получаем $d|_{t(e)r(e)}\neq d'|_{t'(e)r'(e)}$, что противоречит условию (56).

Рассмотрим второй случай. Поскольку все идемпотенты линейно упорядочены имеем ровно четыре возможности:

1. $t(f) \le r(f)$, $t'(f) \le r'(f)$. Следовательно, $t(f)r(e) = t(f)$, $t'(f)r'(e) = t'(f)$ (здесь мы используем $r(f) \le r(e)$, $r'(f) \le r'(e)$). Поэтому равенство (58) превращается в $t(f)d = t'(f)d'$. С другой стороны, неравенство (59) принимает вид $t(f)d \ne t'(f)d'$, и мы приходим к противоречию.

2. $t(f) \le r(f)$, $r'(f) \le t'(f)$.

   Неравенство (60) и равенство (58) преобразуются в
$$t(f) < r'(f),$$
$$t(f)d = t'(f)r'(e)d'.$$

   Следовательно, $\mu \in \mathbf{dom}(r'(f)) \setminus \mathbf{dom}(t(f))$. Поскольку $r'(f) \le t'(f)$, $r'(f) \le r'(e)$, то $\mu \in \mathbf{dom}(t'(f)r'(e))$. Так как $\mu \in \mathbf{dom}(d')$, то $\mu \in \mathbf{dom}(t'(f)r'(e)d')$. Следовательно, по равенству $t(f)d = t'(f)r'(e)d'$ получаем, что $\mu \in \mathbf{dom}(t(f)d)$, но это противоречит условию $\mu \notin \mathbf{dom}(t(f))$.

3. $r(f) \le t(f)$, $t'(f) \le r'(f)$. В этом случае выражения (57,60) принимают вид
$$r(f) < t'(f),$$
$$r(f)d = t'(e)r'(f)d',$$

   и по условию существует элемент $\mu \in \mathbf{dom}(t'(f)) \setminus \mathbf{dom}(r(f))$, $\mu \in \mathbf{dom}(d')$.

   Так как $t'(f) \le t'(e)$ и $t'(f) \le r'(f)$, то $\mu \in \mathbf{dom}(t'(e)r'(f))$. Следовательно, по равенству $r(f)d = t'(e)r'(f)d'$ получаем $\mu \in \mathbf{dom}(r(f)d)$, но это противоречит условию $\mu \notin \mathbf{dom}(r(f))$.

4. $r(f) \le t(f)$, $r'(f) \le t'(f)$. В этом случае выражения (57,60) принимают вид
$$r(f) < r'(f),$$
$$r(f)d = r'(f)d'$$

   и существует элемент $\mu \in \mathbf{dom}(r'(f)) \setminus \mathbf{dom}(r(f))$, $\mu \in \mathbf{dom}(d')$. Тогда из равенства (60) получаем $\mu \in \mathbf{dom}(r(f)d)$, что противоречит $\mu \notin \mathbf{dom}(r(f))$.

◀

Из доказанных выше лемм следует основной результат параграфа.

Теорема 2.8. *Любая инверсная полугруппа S, которая не является группой, не будет эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Доказательство. По теореме 0.8, полугруппа S содержит по крайней мере два идемпотента e, f. Если e и f несравнимы, то по лемме 2.6, полугруппа S не является эквациональной областью. Если же все идемпотенты полугруппы S линейно упорядочены, то по лемме 2.7, полугруппа S также не может быть эквациональной областью. ◀

Покажем принципиальное отличие наших результатов от результатов, полученных в статье Р. Розенблат [96].

Замечание 2.9. *В [96] было доказано, что множество $\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_2$ или $x_3 = x_4\}$ не представимо в виде решения одного уравнения над инверсной полугруппой S (S не является группой). При доказательстве данного утверждения предполагалось, что множество $\mathcal{M}$ совпадает с решением некоторого уравнения $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, и по характеристикам уравнения $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ строилась точка P, для которой было выполнено*

$$P \in \mathrm{V}_S(t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)) \setminus \mathcal{M},$$

и, следовательно, $\mathrm{V}_S(t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)) \neq \mathcal{M}$.

Однако в своей работе мы доказываем, что множество $\mathcal{M}$ не совпадает с решением ни одной системы уравнений. Это более общее утверждение, и метод, предложенный в работе [96], не может быть тут применен.

Действительно, предположим, что множество $\mathcal{M}$ совпадает с решением системы уравнений $\mathbf{S}$. Однако существование точки P, построенной по характеристикам некоторого уравнения $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{S}$ уже не приводит нас к противоречию, поскольку данная точка строится по одному уравнению системы $\mathbf{S}$, и P может не удовлетворять другим уравнениям системы $\mathbf{S}$.

2.3 Клиффордовы полугруппы

Предварительные замечания. В данном параграфе произвольную клиффордову полугруппу S мы будем рассматривать в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. В соответствии с определением термами языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ будут являться, например, следующие выражения $xs(y^2x)^{-1}$, $(xs_1{}^{-1}y)^{-1}s_2x^2$, $((x^2yx)^{-1}s)^{-1}z$. Уравнением в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ будет как обычно являться равенство двух $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$-термов.

В соответствии с теоремой 0.11 клиффордову полугруппу S будем обозначать с помощью $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$, где Ω — полурешетка, S_α — вполне простые полугруппы.

Лемма 2.10. *Пусть $S = \{S_\alpha|\alpha \in \Omega\}$ — клиффордова полугруппа, и предположим, что терм $t(x)$ в своей записи содержит лишь константы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Следовательно, значение терма $t(x)$ в точке $x \in S_\beta$ принадлежит подполугруппе S_γ, где*

$$\gamma = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta.$$

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по построению терма $t(x)$. Если терм $t(x)$ является переменной или константой, то утверждение леммы очевидным образом выполнено.

Пусть $t(x) = (t'(x))^{-1}$, и по предположению индукции значение терма $t'(x)$ принадлежит подполугруппе S_γ, где индекс γ равен произведению индексов полугрупп, которым принадлежат константы терма $t'(x)$ и индексу подполугруппы, которой принадлежит значение переменной x. Поскольку полугруппа S_γ клиффордова, то значение терма $t(x)$ также принадлежит подполугруппе S_γ и утверждение леммы для терма $t(x)$ доказано.

Пусть теперь $t(x) = t_1(x)t_2(x)$, и значение терма $t_i(x)$ в точке $x \in S_\beta$ принадлежит подполугруппе S_{γ_i} такой, что

$$\gamma_i = \alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{in_i}\beta,$$

(множество $\{\alpha_{ij} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ является множеством констант, входящих в запись терма $t_i(x)$).

По определению умножения в полурешетке полугрупп значение терма $t(x)$ принадлежит подполугруппе $S_{\gamma_1\gamma_2}$, где

$$\gamma = \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n_1}\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n_2}\beta.$$

Но легко видеть, что индекс $\gamma_1\gamma_2$ содержит индекс β и индексы всех подполугрупп, чьи элементы входят в запись терма $t(x)$ как константы. ◄

Лемма 2.11. *Пусть $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ клиффордова полугруппа, $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \leq \beta$, $b \in S_\beta$ и $a = \psi_{\alpha,\beta}(b) \in S_\alpha$. Тогда для произвольного терма $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ со значениями $t(b) \in S_\delta$, $t(a) \in S_\gamma$ выполнено $\gamma \leq \delta$ и*

$$\psi_{\gamma,\delta}(t(b)) = t(a). \tag{61}$$

Доказательство. Неравенство $\gamma \leq \delta$ сразу следует из леммы 2.10.

Доказательство равенства (61) будем вести индукцией по построению терма $t(x)$.

Если терм $t(x)$ является константой или переменной, то для него равенство (61) очевидно.

Пусть $t(x) = (t'(x))^{-1}$, и для терма $t'(x)$ выполнено $t'(b) \in S_\delta$, $t'(a) \in S_\gamma$, $\gamma \leq \delta$. Из определения операции обращения имеем $t(b) \in S_\delta$, $t(a) \in S_\gamma$ Тогда

$$\psi_{\gamma,\delta}(t(b)) = \psi_{\gamma,\delta}((t'(b))^{-1}) = (\psi_{\gamma,\delta}(t'(b)))^{-1} = (t'(a))^{-1} = t(a).$$

Пусть теперь $t(x) = t_1(x)t_2(x)$ и для термов $t_1(x), t_2(x)$ утверждение леммы выполнено, то есть для некоторых индексов $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ выполнены равенства

$$t_1(a) \in S_{\gamma_1},\ t_1(b) \in S_{\delta_1},\ \gamma_1 \leq \delta_1,\ t_1(a) = \psi_{\gamma_1,\delta_1}(t_1(b)),$$

$$t_2(a) \in S_{\gamma_2},\ t_2(b) \in S_{\delta_2},\ \gamma_2 \leq \delta_2,\ t_2(a) = \psi_{\gamma_2,\delta_2}(t_2(b)).$$

В соответствии с леммой 2.10 имеем равенства $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\delta = \delta_1\delta_2$ и поэтому $\gamma \leq \delta$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\psi_{\gamma,\delta}(t(b)) = \psi_{\gamma,\delta}(t_1(b)t_2(b)) = \psi_{\gamma,\delta}(\psi_{\delta,\delta_1}(t_1(b))\psi_{\delta,\delta_2}(t_2(b))) = \\ \psi_{\gamma,\delta}(\psi_{\delta,\delta_1}(t_1(b)))\psi_{\gamma,\delta}(\psi_{\delta,\delta_2}(t_2(b))) = \psi_{\gamma,\delta_1}(t_1(b))\psi_{\gamma,\delta_2}(t_2(b)) = \\ \psi_{\gamma_1\gamma_2,\delta_1}(t_1(b))\psi_{\gamma_1\gamma_2,\delta_2}(t_2(b)) = \psi_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_1}(\psi_{\gamma_1,\delta_1}(t_1(b)))\psi_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_2}(\psi(t_2(b))) = \\ \psi_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_1}(t_1(a))\psi_{\gamma_1\gamma_2,\gamma_2}(t_2(a)) = t_1(a)t_2(a) = t(a),\end{aligned}$$

что доказывает лемму. ◄

Лемма 2.12. *Пусть $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — клиффордова полугруппа, $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \leq \beta$, и терм $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ содержит константу из подполугруппы S_α, то для* *любого элемента $b \in S_\beta$ элементы $t(b), t(\psi_{\alpha,\beta}(b))$ принадлежат одной подполугруппе S_γ для некоторого $\gamma \in \Omega$.*

Доказательство. Обозначим $a = \psi_{\alpha,\beta}(b)$. Доказательство леммы следует из леммы 2.10, согласно которой индекс подполугруппы, которой принадлежит значение термов $t(b), t(a)$ вычисляется соответственно по формулам

$$\beta\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\ \alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

где α_i являются индексами подполугрупп, которым принадлежат константы терма $t(x)$.

По условию леммы терм $t(x)$ содержит константу из подполугруппы с индексом α. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_1 = \alpha$. Тогда значения терма $t(b)$ принадлежит подполугруппе с индексом

$$\beta\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n = \alpha\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Очевидно, что элемент $t(a)$ принадлежит подполугруппе с тем же индексом:

$$\alpha\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n = \alpha\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

◀

Лемма 2.13. *Пусть $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ — клиффордова полугруппа, $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \leq \beta$, и терм $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ содержит константу из подполугруппы S_α, то для любого элемента $b \in S_\beta$ выполнено равенство*

$$t(b) = t(\psi_{\alpha,\beta}(b)).$$

Доказательство. Обозначим $a = \psi_{\alpha,\beta}(b)$. Из леммы 2.12 следует, что значения $t(b), t(a)$ принадлежат одной подполугруппе S_γ. По лемме 2.11 существует гомоморфизм $\psi_{\gamma,\gamma}(t(b)) = t(a)$, который по определению полурешетки полугрупп является тождественным. Таким образом, $t(a) = t(b)$. ◀

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.14. *Любая клиффордова полугруппа $S = \{S_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ при $|\Omega| > 1$ не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha < \beta$, и $b \in S_\beta$. Через $a \in S_\alpha$ обозначим образ элемента b под действием гомоморфизма $\psi_{\alpha\beta}$.

Предположим противное, а именно: полугруппа S является эквациональной областью и множество точек $\mathcal{M} = \{(x,y) | x = b$ или $y = b\}$ является решением системы $\mathbf{S}$. Так как $P = (a,a) \notin \mathcal{M}$, то существует уравнение $t(x,y) = s(x,y) \in \mathbf{S}$ такое, что $t(a,a) \neq s(a,a)$.

Заметим, что уравнение $t(x,y) = s(x,y)$ должно содержать вхождения обоих переменных x, y. Действительно, значения обоих частей уравнения от одной переменной $t(x) = s(x)$ одинаковы для точек $(a,b) \in \mathcal{M}$, $(a,a) \notin \mathcal{M}$, и поэтому $t(P) = s(P)$, что противоречит выбору уравнения $t(x,y) = s(x,y)$.

Таким образом, уравнение $t(x,y) = s(x,y)$ принадлежит к одному из следующих типов уравнений:

1. обе части уравнения $t(x,y) = s(x,y)$ содержат переменные x, y;

2. одна из частей уравнения зависит только от одной переменной, а другая часть зависит от двух переменных;

3. одна из частей уравнения зависит только от x, другая часть зависит только от y;

4. одна из частей уравнения зависит от двух переменных, а вторая часть не содержит переменных, то есть является константой.

Последовательно рассмотрим каждый из типов уравнения $t(x,y) = s(x,y)$.

1. Пусть $t'(x) = t(x,a)$, $s'(x) = s(x,a)$. Поскольку $(b,a) \in \mathcal{M}$, то $t'(b) = s'(b)$. По лемме 2.13 получаем равенства $t'(a) = t'(b)$, $s'(a) = s'(b)$, откуда $t'(a) = s'(a)$, что противоречит выбору уравнения $t(x,y) = s(x,y)$.

2. Рассмотрим уравнение $t(x) = s(x,y)$. Из леммы 2.13 имеем равенство $s(a,b) = s(a,a)$. Так как $(a,b) \in \mathcal{M}$, то $t(a) = s(a,b)$. Таким образом, $t(a) = s(a,a)$ и мы получаем противоречие с выбором уравнения $t(x) = s(x,y)$.

3. Для уравнения $t(x) = s(y)$ имеем равенства $t(b) = s(a)$ (так как $(b,a) \in \mathcal{M}$), $t(a) = s(b)$ (поскольку $(a,b) \in \mathcal{M}$), $t(b) = s(b)$ (так как $(b,b) \in \mathcal{M}$). Следовательно, $t(a) = s(a)$, что противоречит выбору уравнения $t(x) = s(x)$

4. Для уравнения $t(x, y) = \mathbf{c}$ имеем равенство $t(a, b) = \mathbf{c}$ ($(a, b) \in \mathcal{M}$). По лемме 2.13 получаем $t(a, a) = t(a, b) = \mathbf{c}$, что противоречит выбору уравнения $t(x, y) = \mathbf{c}$.

◀

Из теоремы 2.14 мы непосредственно получаем следствие.

Следствие 2.15. *Если клиффордова полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s | s \in S\}$, то S вполне проста.*

2.4 Вполне простые полугруппы

В данном параграфе вполне простую полугруппу (в.п.п.) S мы будем рассматривать в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. Таким образом, примерами термов данного языка могут быть, например, выражения $xs(y^2x)^{-1}$, $(xs_1{}^{-1}y)^{-1}s_2x^2$.

Пусть s_1, s_2 — два различных элемента в.п.п. S. Мы будем говорить,что терм $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ *разделяет* элементы s_1, s_2, если $t(s_1) \neq t(s_2)$.

Лемма 2.16. *Если у в.п.п. $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ сэндвич-матрица $\mathbf{P}$ не вырождена, то для любой пары различных элементов $s_1, s_2 \in S$ существует терм $t(x)$ вида*

$$t(x) = (1, 1, i)x(\lambda, 1, 1), \tag{62}$$

разделяющий элементы s_1, s_2.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $s_1 = (\lambda, g, i)$, $s_2 = (\mu, h, j)$, $h \neq g$. Полагаем $t(x) = (1, 1, 1)x(1, 1, 1)$. Имеем

$$t(s_1) = (1, 1, 1)(\lambda, g, i)(1, 1, 1) = (1, p_{1\lambda}gp_{i1}, 1) = (1, g, 1),$$

$$t(s_2) = (1, 1, 1)(\mu, h, j)(1, 1, 1) = (1, p_{1\mu}hp_{j1}, 1) = (1, h, 1),$$

и поэтому $t(s_1) \neq t(s_2)$.

2. Пусть $s_1 = (\lambda, g, i)$, $s_2 = (\mu, g, j)$ и $\lambda \neq \mu$ (аналогично рассматривается случай, когда $i \neq j$). Допустим, что ни один из термов вида $t(x) = (1, 1, k)x(1, 1, 1) \in \mathcal{T}(S, \Gamma)$ не разделяет s_1, s_2. Иными словами, элементы

$$(1, 1, k)(\lambda, g, i)(1, 1, 1) = (1, p_{k\lambda}g, 1)(1, 1, 1) = (1, p_{k\lambda}gp_{11}, 1) = (1, p_{k\lambda}g, 1)$$

и

$$(1, 1, k)(\mu, g, j)(1, 1, 1) = (1, p_{k\mu}g, 1)(1, 1, 1) = (1, p_{k\mu}gp_{11}, 1) = (1, p_{k\mu}g, 1)$$

равны друг другу для любого $k \in I$. Следовательно, выполняются равенства $p_{k\lambda} = p_{k\mu}$ для всех $k \in I$. Это означает, что столбцы с номерами λ, μ одинаковы, что противоречит невырожденности матрицы $\mathbf{P}$.

◀

Пусть $t(x)$ — терм языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. Через $[t](x)$ будем обозначать терм языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, получаемый из $t(x)$ удалением всех вхождений операции обращения. Например, если $t(x) = ((xsy^{-1})^{-1}zx^{-1})^{-1}$, то $[t](x) = xsyzx$.

Лемма 2.17. *Пусть у в.п.п. $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ в матрице $\mathbf{P}$ строки (столбцы) с номерами i, j (λ, μ) одинаковы. Тогда для элементов $s_1 = (1, 1, i)$, $s_2 = (1, 1, j)$ $(s_1 = (\lambda, 1, 1)$, $s_2 = (\mu, 1, 1))$ и произвольного терма $t(x)$ языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$ выполнено одно из следующих условий:*

1. $t(s_1) = t(s_2)$;
2. $t(s_1) = (\nu, g, i)$, $t(s_2) = (\nu, g, j)$ *для некоторых* $g \in G$, $\nu \in \Lambda$, *если терм* $[t](x)$ *заканчивается на переменную* x $(t(s_1) = (\lambda, g, k)$, $t(s_2) = (\mu, g, k)$ *для некоторых* $g \in G$, $k \in I$, *если терм* $[t](x)$ *начинается на переменную* $x)$. *Иными словами, значения терма* $t(x)$ *на элементах* s_1, s_2 *различаются только по второму (первому) индексу.*

Доказательство. Будем считать, что в матрице $\mathbf{P}$ столбцы с номерами λ, μ одинаковы (аналогично рассматривается случай, когда в матрице $\mathbf{P}$ есть одинаковые строки).

Доказательство будем вести индукцией по построению терма $t(x)$. Если терм $t(x)$ является переменной или константой, то для него утверждение леммы очевидным образом выполнено.

Пусть теперь $t(x) = (t'(x))^{-1}$, и для терма $t'(x)$ выполнено утверждение леммы. Если $t'(s_1) = t'(s_2)$, то и $t(s_1) = t(s_2)$. Если же терм $[t(x)]$ начинается на переменную x, то имеем

$$t(s_1) = (\lambda, g, k)^{-1} = (\lambda, {p_{k\lambda}}^{-1} g^{-1} {p_{k\lambda}}^{-1}, k),$$

$$t(s_2) = (\mu, g, k)^{-1} = (\mu, {p_{k\mu}}^{-1} g^{-1} {p_{k\mu}}^{-1}, k).$$

Из вырожденности матрицы $\mathbf{P}$ получаем равенство $p_{k\lambda} = p_{k\mu}$, и поэтому значения терма $t(x)$ на элементах s_1, s_2 различаются только по первому индексу.

Рассмотрим теперь терм $t(x) = t'(x)t''(x)$. Возможны следующие четыре случая.

1. Оба терма $[t'](x)$, $[t''](x)$ не начинаются на переменную x. По предположению индукции имеем равенства $t'(s_1) = t'(s_2)$, $t''(s_1) = t''(s_2)$, и, следовательно, $t(s_1) = t(s_2)$.

2. На переменную x начинается только терм $[t''](x)$. В этом случае имеем равенства $t'(s_1) = t'(s_2) = (\nu, h, l)$, $t''(s_1) = (\lambda, g, k)$, $t''(s_2) = (\mu, g, k)$ для некоторых $g, h \in G, \nu \in \Lambda$, $k, l \in I$.

   Тогда значения терма $t(x)$ равны:

$$t(s_1) = (\nu, h, l)(\lambda, g, k) = (\nu, hp_{l\lambda}g, k),$$

$$t(s_2) = (\nu, h, l)(\mu, g, k) = (\nu, hp_{l\mu}g, k).$$

   Из вырожденности матрицы $\mathbf{P}$ следует $p_{l\lambda} = p_{l\mu}$, и поэтому $t(s_1) = t(s_2)$.

3. На переменную x начинается только терм $[t'](x)$. Тогда $t'(s_1) = (\lambda, g, k)$, $t'(s_2) = (\mu, g, k)$, $t''(s_1) = t''(s_2) = (\nu, h, l)$ для некоторых $g, h \in G, \nu \in \Lambda$, $k, l \in I$. Имеем

$$t(s_1) = (\lambda, g, k)(\nu, h, l) = (\lambda, gp_{k\nu}h, l),$$

$$t(s_2) = (\mu, g, k)(\nu, h, l) = (\mu, gp_{k\nu}h, l),$$

   и значения терма $t(x)$ различаются только по первому индексу.

4. На переменную x начинаются оба терма $[t'](x)$, $[t''](x)$. В этом случае по предположению индукции $t'(s_1) = (\lambda, g, k)$, $t'(s_2) = (\mu, g, k)$, $t''(s_1) = (\lambda, h, l)$, $t''(s_2) = (\mu, h, l)$ для некоторых $g, h \in G$, $k, l \in I$. Тогда

$$t(s_1) = (\lambda, g, k)(\lambda, h, l) = (\lambda, gp_{k\lambda}h, l),$$

$$t(s_2) = (\mu, g, k)(\mu, h, l) = (\mu, g_{k\mu}h, l),$$

   и из вырожденности матрицы $\mathbf{P}$ получаем $p_{k\lambda} = p_{k\mu}$. Таким образом, элементы $t(s_1), t(s_2)$ различаются только первому индексу.

◄

Лемма 2.18. *Если матрица* $\mathbf{P}$ *вырождена, то в.п.п.* $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ *не является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.

Доказательство. Предположим, что полугруппа S является эквациональной областью при вырожденной матрице $\mathbf{P}$, у которой столбцы с номерами λ, μ одинаковы (случай, когда матрица $\mathbf{P}$ имеет одинаковые строки, рассматривается аналогично).

Рассмотрим систему уравнений $\mathbf{S}(x,y)$, которая имеет решение $\mathcal{M} = \{(x,y)|x = (\lambda,1,1)$ или $y = (\lambda,1,1)\}$, и пусть $t(x,y) = s(x,y)$ — произвольное уравнение системы $\mathbf{S}$, не удовлетворяющее точке $((\mu,1,1),(\mu,1,1))$.

Допустим, что термы $[t](x,(\mu,1,1))$, $[s](x,(\mu,1,1))$ не начинаются на переменную x. Тогда по лемме 2.17 будем иметь равенства

$$t((\lambda,1,1),(\mu,1,1)) = t((\mu,1,1),(\mu,1,1)),\ s((\lambda,1,1),(\mu,1,1)) = s((\mu,1,1),(\mu,1,1)).$$

Поскольку

$$t((\lambda,1,1),(\mu,1,1)) = s((\lambda,1,1),(\mu,1,1)),$$

то получаем

$$t(\mu,1,1),(\mu,1,1)) = s((\mu,1,1),(\mu,1,1)),$$

что противоречит выбору уравнения $t(x,y) = s(x,y)$.

Предположим теперь, что оба терма $[t](x,(\mu,1,1))$, $[s](x,(\mu,1,1))$ начинаются с переменной x. С помощью леммы 2.17 получаем равенства

$$t((\lambda,1,1),(\mu,1,1)) = (\lambda,g,k),\ t((\mu,1,1),(\mu,1,1)) = (\mu,g,k).$$

Поскольку $((\lambda,1,1),(\mu,1,1)) \in \mathcal{M}$, то $s((\lambda,1,1),(\mu,1,1) = (\lambda,g,k)$, и по лемме 2.17 получаем

$$s((\mu,1,1),(\mu,1,1)) = (\mu,g,k),$$

откуда следует

$$t((\mu,1,1),(\mu,1,1)) = s((\mu,1,1),(\mu,1,1)),$$

что противоречит выбору уравнения $t(x,y) = s(x,y)$.

Таким образом, остается последний случай: терм $[t](x,(\mu,1,1))$ начинается на переменную x, а терм $[s](x,(\mu,1,1))$ начинается на константу $\mathbf{c}$. Следовательно, имеем две возможности:

1. константа $\mathbf{c}$ была получена при подстановке элемента $(\mu,1,1)$ вместо переменной y, то есть терм $[s](x,y)$ начинается с переменной y;

2. терм $[s](x,y)$ начинается с константы $\mathbf{c}$.

Покажем, что каждый из случаев невозможен.

1. В этом случае уравнение $t(x, y) = s(x, y)$ не будет удовлетворять точке $((\lambda, 1, 1), (\mu, 1, 1)) \in \mathcal{M}$, поскольку элемент $t((\lambda, 1, 1), (\mu, 1, 1))$ будет иметь первый индекс λ, а у элемента $s((\lambda, 1, 1), (\mu, 1, 1))$ первый индекс будет равен μ.

2. Пусть $\mathbf{c} = (\nu, g, k)$, тогда после подстановки в уравнение $t(x, y) = s(x, y)$ точек $((\lambda, 1, 1), (\lambda, 1, 1)) \in \mathcal{M}$ (если $\nu \neq \lambda$) или $((\mu, 1, 1), (\lambda, 1, 1)) \in \mathcal{M}$ (если $\nu \neq \mu$) значения термов $t(x, y), s(x, y)$ будут иметь различные первые индексы.

◀

Непосредственно проверяется, что множество элементов в.п.п. $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$

$$\Gamma = \{(1, g, 1) | g \in G\}$$

является группой изоморфной G. Заметим также, что в силу нормализованности матрицы $\mathbf{P}$ единицей подгруппы Γ является элемент $(1, 1, 1)$.

Пусть элементы x, y принадлежит подгруппе $\Gamma \subseteq S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\lambda, g, i)x = (\lambda, g, 1)x = (\lambda, g, 1)x(1, 1, 1), \tag{63}$$

$$x(\lambda, g, i) = x(1, g, i) = (1, 1, 1)x(1, g, i) \tag{64}$$

$$((\lambda, g, 1)x(1, h, j))^{-1} = (\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}h^{-1}, 1)x^{-1}(1, g^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, 1) \tag{65}$$

$$((\lambda, g, i)x)^{-1} = (\lambda, 1, 1)x^{-1}(1, g^{-1}, 1), \tag{66}$$

$$(x(\lambda, g, i))^{-1} = (1, g^{-1}, 1)x^{-1}(1, 1, i), \tag{67}$$

$$x(\lambda, g, i)y = x(1, g, 1)y, \tag{68}$$

$$(x(\lambda, g, i)y)^{-1} = y^{-1}(1, g^{-1}, 1)x^{-1}. \tag{69}$$

Справедливость равенств (63, 64) легко устанавливается непосредственными вычислениями.

Докажем равенство (65). Пусть $x = (1, g_x, 1)$, тогда

$$((\lambda, g, 1)(1, g_x, 1)(1, h, j))^{-1} = (\lambda, gg_xh, j)^{-1} = (\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}(gg_xh)^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, j) =$$
$$(\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}h^{-1}{g_x}^{-1}g^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, j).$$

С другой стороны,

$$(\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}h^{-1}, 1)(1, g_x, 1)^{-1}(1, g^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, 1) = (\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}h^{-1}, 1)(1, {g_x}^{-1}, 1)(1, g^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, 1) =$$
$$(\lambda, {p_{j\lambda}}^{-1}h^{-1}{g_x}^{-1}g^{-1}{p_{j\lambda}}^{-1}, j).$$

Равенства (66, 67) непосредственно следуют из (63, 64, 65). Докажем теперь равенства (68, 69). Пусть $x = (1, g_x, 1)$, $y = (1, g_y, 1)$, тогда

$$x(\lambda, g, i)y = (1, g_x, 1)(\lambda, g, i)(1, g_y, 1) = (1, g_x g g_y, 1),$$

$$(x(\lambda, g, i)y)^{-1} = (1, g_x g g_y, 1)^{-1} = (1, (g_x g g_y)^{-1}, 1).$$

С другой стороны,

$$x(1, g, 1)y = (1, g_x, 1)(1, g, 1)(1, g_y, 1) = (1, g_x g g_y, 1),$$

$$y^{-1}(1, g^{-1}, 1)x^{-1} = (1, {g_y}^{-1}, 1)(1, g^{-1}, 1)(1, {g_x}^{-1}, 1) = (1, {g_y}^{-1}g^{-1}{g_x}^{-1}, 1) = (1, (g_x g g_y)^{-1}, 1),$$

что доказывает равенства (68, 69).

Лемма 2.19. *Если в.п.п. $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, то группа G также является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G)$.*

Доказательство. Поскольку S — эквациональная область, то множество $\mathcal{M} = \{(x, y) | x = (1, 1, 1) \text{ или } y = (1, 1, 1)\} \subseteq S^2$ является алгебраическим над S. То есть существует система уравнений $\mathbf{S}$ над S такая, что $\mathrm{V}_S(\mathbf{S}) = \mathcal{M}$.

Ниже будет построена система $\mathbf{S}'$ эквивалентная $\mathbf{S}$ над группой Γ, и все константы системы $\mathbf{S}'$ принадлежат Γ.

Применяя тождества (65, 66, 67, 69), из системы $\mathbf{S}$ мы получим систему $\mathbf{S}_1$ со свойствами:

1. система $\mathbf{S}_1$ эквивалентна $\mathbf{S}$ над подгруппой Γ;
2. операция обращения $^{-1}$ в уравнениях системы $\mathbf{S}_1$ применяется только к переменным: x^{-1}, y^{-1}.

С помощью тождества (68) из системы $\mathbf{S}_1$ получим систему уравнений $\mathbf{S}_2$ такую, что любая константа $\mathbf{c}$ в произвольном уравнении $t(x, y) = s(x, y) \in \mathbf{S}_2$ принадлежит подгруппе Γ, если $\mathbf{c}$ не является первым или последним символом термов $t(x, y), s(x, y)$. Очевидно, что система $\mathbf{S}_2$ эквивалентная над группой Γ системе $\mathbf{S}$.

Рассмотрим уравнение системы $\mathbf{S}_2$, одна часть которого начинается с константы $\mathbf{c} = (\lambda, g, i) \notin \Gamma$ (аналогично рассматриваются случай, когда одна из частей уравнения оканчивается на константу $\mathbf{c} \notin \Gamma$). Согласно (63), можно считать $i = 1$, то есть

$(\lambda, g, 1)t'(x, y) = s(x, y) \in \mathbf{S}_2$, тогда в силу совместности над Γ системы $\mathbf{S}_2$ терм $s(x, y)$ начинается либо на константу вида (λ, h, j), либо на переменную и $\lambda = 1$.

Рассмотрим только первый вид терма $s(x, y)$ (второй вид рассматривается аналогично): $s(x, y) = (\lambda, h, j)s'(x, y)$. Тогда непосредственной проверкой устанавливается, что уравнение

$$(\lambda, g, 1)t'(x, y) = (\lambda, h, j)s'(x, y)$$

эквивалентно

$$(1, g, 1)t'(x, y) = (1, h, 1)s'(x, y).$$

Таким образом, любое уравнение системы $\mathbf{S}_2$ эквивалентно уравнению, в котором все константы принадлежат подгруппе Γ. Полученную систему уравнений обозначим через $\mathbf{S}'$, которая эквивалентна над группой Γ системе $\mathbf{S}$. Следовательно, $\mathrm{V}_\Gamma(\mathbf{S}') = \{(x, y)|x = (1, 1, 1)$ или $y = (1, 1, 1)\} \subseteq \Gamma^2$, и по теореме 0.30 группа Γ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_\Gamma$. Изоморфизм между группами Γ, G доказывает утверждение леммы. ◀

Далее для краткости элемент $(1, 1, 1)$ в.п.п. S будем обозначать через $[\mathbf{1}]$.

Лемма 2.20. *Пусть сэндвич-матрица* $\mathbf{P}$ *в.п.п.* $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ *не вырождена. Тогда уравнение* $x = y$ *эквивалентно системе уравнений вида* $\mathbf{S}_=(x, y) = \{t_i(x, y) = [\mathbf{1}]|i \in \mathcal{I}\}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{M}_=$ множество решений уравнения $x = y$, то есть множество точек $\{(x, x)|x \in S\}$.

Для любой точки $(s, s') \notin \mathcal{M}_=$ существует терм $t_{(s,s')}(x)$, который разделяет элементы s, s' и в соответствии с леммой 2.16 имеет вид (62).

Полагаем

$$\mathbf{S}_=(x, y) = \{[\mathbf{1}]x([\mathbf{1}]y[\mathbf{1}])^{-1} = [\mathbf{1}]\} \bigcup_{(s,s')\notin\mathcal{M}_=} \{t_{(s,s')}(x)(t_{(s,s')}(y))^{-1} = [\mathbf{1}]\}.$$

Покажем, что система $\mathbf{S}_=(x, y)$ имеет решение $\mathcal{M}_=$, и пусть $P = ((\mu, g, j), (\mu, g, j)) \in \mathcal{M}_=$. Так как

$$[\mathbf{1}](\mu, g, j)([\mathbf{1}](\mu, g, j)[\mathbf{1}])^{-1} = (1, g, j)(1, g^{-1}, 1) = [\mathbf{1}],$$

то точка P удовлетворяет первому уравнению системы $\mathbf{S}_=$. Для других уравнений системы $\mathbf{S}_=$ также имеем равенство

$$t_{(s,s')}((\mu,g,j))(t_{(s,s')}((\mu,g,j)))^{-1} = (1,1,i)(\mu,g,j)(\lambda,1,1)((1,1,i)(\mu,g,j)(\lambda,1,1))^{-1} = (1,p_{i\mu}gp_{j\lambda},1)((1,p_{i\mu}gp_{j\lambda},1))^{-1} = (1,p_{i\mu}gp_{j\lambda},1)(1,(p_{i\mu}gp_{j\lambda})^{-1},1) = [\mathbf{1}].$$

Таким образом, любая точка множества $\mathcal{M}_=$ удовлетворяет всем уравнениям системы $\mathbf{S}_=$. Если $(s,s') \notin \mathcal{M}_=$, то в системе $\mathbf{S}_=$ существует уравнение $t_{(s,s')}(x)(t_{(s,s')}(y))^{-1} = [\mathbf{1}]$, которому точка (s,s') не удовлетворяет. Действительно, обозначив через $(1,h,1)$, $(1,h',1)$ значения терма $t_{(s,s')}(x)$ в точках s,s' соответственно, мы получаем

$$t_{(s,s')}(s)(t_{(s,s')}(s'))^{-1} = (1,h,1)((1,h',1))^{-1} = (1,h(h')^{-1},1) \neq [\mathbf{1}],$$

так как $h \neq h'$.

Окончательно, получаем, что $\mathrm{V}_S(\mathbf{S}_=) = \mathcal{M}_=$, и, таким образом, система $\mathbf{S}_=(x,y)$ эквивалентна уравнению $x = y$. ◀

Лемма 2.21. *Если множество $\mathcal{M} = \{(x,y)|x = (1,1,1)$ или $y = (1,1,1)\}$ является алгебраическим множеством над в.п.п. $S = (G,\mathbf{P},\Lambda,I)$ с невырожденной сэндвич-матрицей $\mathbf{P}$, то полугруппа S будет эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 0.29 достаточно показать, что существует система уравнений $\mathbf{S}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ с решением $\mathcal{M}_{sem}$.

По лемме 2.20 уравнения $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$ эквивалентны системам уравнений $\mathbf{S}_=(x_1,x_2) = \{t_i(x_1,x_2) = [\mathbf{1}]|i \in \mathcal{I}\}$, $\mathbf{S}_=(x_3,x_4) = \{t_i(x_3,x_4) = [\mathbf{1}]|i \in \mathcal{I}\}$ соответственно.

Применяя законы дистрибутивности для алгебраических множеств, получим, что

$$\mathcal{M}_{sem} = \bigcap_{i,j\in\mathcal{I}} \mathrm{V}_S(t_i(x_1,x_2) = [\mathbf{1}] \vee t_j(x_3,x_4) = [\mathbf{1}])$$

По условию существует система уравнений $\mathbf{S}'(x,y)$ с решением $\mathcal{M}$. Следовательно, множество $\mathrm{V}_S(t_i(x_1,x_2) = [\mathbf{1}] \vee t_j(x_3,x_4) = [\mathbf{1}])$ совпадает с решением системы $\mathbf{S}'(t_i(x_1,x_2),t_j(x_3,x_4))$, и

$$\mathcal{M}_{sem} = \bigcap_{i,j\in\mathcal{I}} \mathrm{V}_S(\mathbf{S}'(t_i(x_1,x_2),t_j(x_3,x_4))).$$

Отсюда легко видеть, что множество $\mathcal{M}_{sem}$ совпадает с решением системы

$$\mathbf{S}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bigcup_{i,j\in\mathcal{I}} \mathbf{S}'(t_i(x_1,x_2),t_j(x_3,x_4)),$$

и поэтому является алгебраическим. ◄

Лемма 2.22. *Пусть сэндвич-матрица* $\mathbf{P}$ *в.п.п.* $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ *не вырождена, и группа* G *— эквациональная область в групповом языке* $\mathcal{L}_g(G)$. *Тогда множество* $\mathcal{M} = \{(x, y) | x = (1, 1, 1)$ *или* $y = (1, 1, 1)\}$ *является алгебраическим множеством над полугруппой* S *в языке* $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.

Доказательство. Пусть $[\mathbf{1}] \neq s \in S$, тогда в соответствии с леммой 2.16 существует терм вида (62), разделяющий элементы $[\mathbf{1}], s$. Данный терм мы будем обозначать через $t_s(x)$.

Полагаем

$$\mathbf{S}'(x,y) = \bigcup_{g \in G} \{[\mathbf{1}]x(1,g^{-1},1)y(1,g,1)([\mathbf{1}]x[\mathbf{1}])^{-1}(1,g^{-1},1)([\mathbf{1}]y[\mathbf{1}])^{-1}(1,g,1) = [\mathbf{1}]\}$$
$$\bigcup_{(s,s') \notin \mathcal{M}, g \in G} \{t_s(x)(1,g^{-1},1)t_{s'}(y)(1,g,1)(t_s(x))^{-1}(1,g^{-1},1)(t_{s'}(y))^{-1}(1,g,1) = [\mathbf{1}]\}.$$

Покажем, что система $\mathbf{S}'(x, y)$ имеет решение $\mathcal{M}$.

Докажем вначале включение $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{V}_S(\mathbf{S}')$.

Пусть $P = ((\mu, h, j), [\mathbf{1}]) \in \mathcal{M}$ (точка $([\mathbf{1}], (\mu, h, j)) \in \mathcal{M}$ рассматривается аналогично). Имеем равенства

$$[\mathbf{1}](\mu,h,j)(1,g^{-1},1)[\mathbf{1}](1,g,1)([\mathbf{1}](\mu,h,j)[\mathbf{1}])^{-1}(1,g^{-1},1)([\mathbf{1}][\mathbf{1}][\mathbf{1}])^{-1}(1,g,1) =$$
$$[\mathbf{1}](\mu,h,j)[\mathbf{1}]((1,h^{-1},1))(1,g^{-1},1)([\mathbf{1}])(1,g,1) =$$
$$(1,h,1)(1,h^{-1},1)(1,g^{-1},1)(1,g,1) = [\mathbf{1}].$$

Иными словами, точка P удовлетворяет первой группе уравнений системы $\mathbf{S}'$.

Так термы $t_s(x), t_{s'}(x)$ имеют вид (62), то $t_s([\mathbf{1}]) = t_{s'}([\mathbf{1}]) = [\mathbf{1}]$, и пусть $t_s((\mu, h, j)) = (1, f, 1)$, $t_{s'}((\mu, h, j)) = (1, f', 1)$.

Вычисляем

$$t_s((\mu,h,j))(1,g^{-1},1)t_{s'}([\mathbf{1}])(1,g,1)(t_s((\mu,h,j)))^{-1}(1,g^{-1},1)(t_{s'}([\mathbf{1}]))^{-1}(1,g,1) =$$
$$(1,f,1)(1,g^{-1},1)[\mathbf{1}](1,g,1)(1,f^{-1},1)(1,g^{-1},1)[\mathbf{1}](1,g,1) = [\mathbf{1}],$$

и поэтому точка P удовлетворяет второй группе уравнений системы $\mathbf{S}'$, то есть $P \in \mathrm{V}_S(\mathbf{S}')$.

Докажем теперь включение $\mathcal{M} \supseteq \mathrm{V}_S(\mathbf{S}')$.

Пусть $Q = (s, s') \notin \mathcal{M}$. Допустим, что точка Q удовлетворяет всем уравнениям

$$t_s(x)(1, g^{-1}, 1)t_{s'}(y)(1, g, 1)(t_s(x))^{-1}(1, g^{-1}, 1)(t_{s'}(y))^{-1}(1, g, 1) = [\mathbf{1}]$$

для всех $g \in G$.

Из выбора термов $t_s(x), t_{s'}(x)$ следует существование нееденичных элементов $f, f' \in G$ таких, что $t_s(s) = (1, f, 1)$, $t_{s'}(s') = (1, f', 1)$.

Поэтому для всех $g \in G$ имеем равенства

$$t_s(s)(1, g^{-1}, 1)t_{s'}(s')(1, g, 1)(t_s(s)^{-1}(1, g^{-1}, 1)(t_{s'}(s'))^{-1}(1, g, 1) = [\mathbf{1}],$$

$$(1, f, 1)(1, g^{-1}, 1)(1, f', 1)(1, g, 1)(1, f^{-1}, 1)(1, g^{-1}, 1)(1, (f')^{-1}, 1)(1, g, 1) = \mathbf{1},$$

$$(1, fg^{-1}f'gf^{-1}g^{-1}(f')^{-1}g, 1) = [\mathbf{1}],$$

$$fg^{-1}f'gf^{-1}g^{-1}(f')^{-1}g = 1 \Leftrightarrow [f, (f')^g] = 1,$$

где через $[f, (f')^g]$ обозначен коммутатор элементов f и элемента f', сопряженного с помощью g в группе G.

Поскольку последнее полученное равенство выполнено для всех $g \in G$, то элементы f, f' являются делителями нуля в группе G. Тогда по теореме 0.31 группа G не может быть эквациональной областью, что противоречит условию леммы.

◀

Теорема 2.23. *В.п.п. $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s | s \in S\}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1. *сэндвич-матрица $\mathbf{P}$ не вырождена;*
2. *структурная группа G является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G)$.*

Доказательство. Необходимость следует из лемм 2.18, 2.19. Докажем достаточность.

Из леммы 2.22 мы получаем, что множество $\mathcal{M} = \{(x, y) | x = (1, 1, 1)$ или $y = (1, 1, 1)\}$ является алгебраическим над полугруппой S в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. Следовательно, выполнены все условия для леммы 2.21, из которой следует, что полугруппа S будет эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. ◀

Из теорем 0.4, 0.5, следствий 0.32, 0.33 и критерия 2.23 легко следуют утверждения.

Следствие 2.24. *Любая свободная вполне простая полугруппа* $S = F_{css}(X)$ *ранга* $n \geq 2$ *является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.

Следствие 2.25. *Свободное произведение произвольных вполне простых полугрупп является эквациональной областью в языке* $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.

Следующий результат о системах уравнений над в.п.п. S следует из леммы 2.20.

Следствие 2.26. *Любое алгебраическое множество* $Y \subseteq S^n$ *над в.п.п.* $S = (G, \mathbf{P}, \lambda, I)$ *при невырожденной матрице* P *определяется системой вида* $\mathbf{S} = \{t_i(X) = [\mathbf{1}] | i \in \mathcal{I}\}$.

Доказательство. Пусть множество Y равно решению системы $\mathbf{S}' = \{t_i(X) = s_i(X) | i \in \mathcal{I}\}$.

В соответствии с леммой 2.20, равенство $x = y$ эквивалентно системе уравнений $\mathbf{S}_=(x, y)$, которая имеет вид $\{r_j(x, y) = [\mathbf{1}] | j \in \mathcal{J}\}$. Тогда каждое уравнение $t_i(X) = s_i(X)$ системы $\mathbf{S}'$ эквивалентно системе $\mathbf{S}_=(t_i(X), s_i(X))$. Следовательно, $\mathbf{S}'$ эквивалентна системе

$$\mathbf{S} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{S}_=(t_i(X), s_i(X)),$$

каждое уравнение которой имеет правую часть равную $[\mathbf{1}]$. ◀

2.5 Конечные простые полугруппы

В данном параграфе мы будем работать с конечными простыми полугруппами. Поскольку каждая конечная простая полугруппа вполне проста, то для конечных простых полугрупп справедлива теорема 0.3, и поэтому каждая конечная простая полугруппа S имеет представление $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$, где группа G и множества Λ, I конечны. Ниже каждую конечную простую полугруппу S мы будем рассматривать в языке без обращения $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$.

Поскольку язык $\mathcal{L}_s(S)$ является обеднением языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, то многие результаты, доказанные в параграфе 2.4 автоматически переносятся на класс конечных простых полугрупп языка $\mathcal{L}_s(S)$. Полученные ниже результаты будут существенным образом использоваться в параграфе 2.7, где будут рассматриваться эквациональные области в классе конечных полугрупп.

Пусть $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ — конечная простая полугруппа. Поскольку матрица $\mathbf{P}$ нормализована, то легко проверить, что множество элементов

$$\Gamma = \{(1, g, 1) | g \in G\} \subseteq S$$

конечной простой полугруппы S образует подгруппу изоморфную G с единицей $(1, 1, 1)$.

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in S^n$. Через $\mathcal{T}_P(M, \Gamma)$ (где $P \in M \subseteq S^n$) обозначим множество всех термов $t(X)$ вида (62) таких, что $t(P) \neq (1, 1, 1)$, и $t(Q) = (1, 1, 1)$ для всех $Q \in M \setminus \{P\}$.

Лемма 2.27. *Пусть $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ — конечная простая полугруппа, матрица $\mathbf{P}$ не вырождена и G — эквациональная область в языке $\mathcal{L}_g(G)$. Тогда для любого натурального числа n и произвольной точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in S^n$ множество $\mathcal{T}_P(S^n, \Gamma)$*

1. *не пусто;*
2. *вместе с каждый термом $t(X)$ множество $\mathcal{T}_P(S^n, \Gamma)$ содержит все термы вида $(1, g, 1)t(X)(1, g^{-1}, 1)$, $g \in G$.*

Доказательство. Второе свойство множеств $\mathcal{T}_P(S^n, \Gamma)$ легко следует из первого. Пусть $t(X) \in \mathcal{T}_P(S^n, \Gamma)$, тогда:

$$(1, g, 1)t(Q)(1, g^{-1}, 1) = (1, g, 1)(1, 1, 1)(1, g^{-1}, 1) = (1, g1g^{-1}, 1) = (1, 1, 1),$$

$(1,g,1)t(P)(1,g^{-1},1) = (1,g,1)(1,h,1)(1,g^{-1},1) = (1,ghg^{-1},1) \neq (1,1,1),$ так как $h \neq 1$.

Докажем теперь, что множество $\mathcal{T}_P(S^n,\Gamma)$ не пусто.

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$t^{-1}(X) = t^{|G|-1}(X).$$

Очевидно, что для любого терма $t(X)$ вида (62) выполнено, что и $t^{-1}(X)$ имеет вид (62), и, кроме того,

$$t(X)t^{-1}(X) = t^{-1}(X)t(X) = t^{|G|}(X) = (1,1,1) \text{ для всех } X \in S^n.$$

Докажем непустоту множества $\mathcal{T}_P(M,\Gamma)$ индукцией по мощности множества $M \subseteq S^n$. Пусть $|M| = 2$, и $P, Q \subseteq S^n$ — две различные точки множества M.

Без ограничения общности можно считать, что точки P, Q различаются первой координатой: $p_1 \neq q_1$. По лемме 2.16 существует терм $t(x)$ вида (62) со свойством $t(p_1) \neq t(q_1)$. Рассмотрим терм $s(X) = t(x_1)t^{-1}(q_1) \in \mathcal{T}(S,\Gamma)$, который принимает значения $s(P) = t(p_1)t^{-1}(q_1) \neq (1,1,1)$, $s(Q) = t(q_1)t^{-1}(q_1) = (1,1,1)$. Следовательно, $s(X) \in \mathcal{T}_P(M,\Gamma)$.

Предположим, что для всех множеств M, содержащих не более чем m элементов, утверждение леммы доказано. Докажем лемму для множества M при $|M| = m+1$.

Пусть $P, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — все элементы множества M. По предположению существуют термы

$$t(X) \in \mathcal{T}_P(\{P, Q_2, Q_3, \ldots, Q_m\},\Gamma), s(X) \in \mathcal{T}_P(\{P, Q_1, Q_3, \ldots, Q_m\},\Gamma),$$

принимающие значения:

	P	Q_1	Q_2	Q_3	$\ldots$	Q_m
$t(X)$	$(1,g_1,1)$	$(1,h_1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$\ldots$	$(1,1,1)$
$s(X)$	$(1,g_2,1)$	$(1,1,1)$	$(1,h_2,1)$	$(1,1,1)$	$\ldots$	$(1,1,1)$

Заметим, что в качестве g_1, g_2 можно взять элементы группы G, которые не коммутируют друг с другом. Действительно, по второму свойству множества $\mathcal{T}_P(M,\Gamma)$ в качестве g_2 можно взять любой элемент из класса сопряженности $\{gg_2g^{-1} | g \in G\}$. Если же g_1 коммутирует со всеми элементами класса сопряженности элемента g_2, то g_1 является делителем нуля в группе G, и по теореме 0.31 группа G не является эквациональной областью, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим терм

$$p(X) = [t(X), s(X)] = t^{-1}(X)s^{-1}(X)t(X)s(X) \in \mathcal{T}(S,\Gamma),$$

значения которого равны

	P	Q_1	Q_2	Q_3	$\ldots$	Q_m
$p(X)$	$[[g_1,g_2];1,1]$	$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$\ldots$	$(1,1,1)$

где через $[g_1,g_2]=g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2\neq 1$ обозначен коммутатор элементов g_1,g_2 в группе G.

Следовательно, $p(X)\in\mathcal{T}_P(M,\Gamma)$, что доказывает лемму. ◀

Теорема 2.28. *Конечная простая полугруппа $S=(G,\mathbf{P},\Lambda,I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *матрица $\mathbf{P}$ не вырождена;*

2. *группа G является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G)$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Из определения эквациональной области легко следует, что *если полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, то и в расширении языка $\mathcal{L}_{s-inv}(S)\supseteq\mathcal{L}_s(S)$ полугруппа S также будет эквациональной областью.* Таким образом, с помощью теоремы 2.23 мы получаем, что полугруппа $S=(G,\mathbf{P},\Lambda,I)$ должна обладать невырожденной матрицей $\mathbf{P}$ и структурная группа G должна быть эквациональной областью.

Докажем достаточность. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_{sem}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1=x_2$ или $x_3=x_4\}\subseteq S^4$. По лемме 2.27 для каждой точки $P\notin\mathcal{M}_{sem}$ существует терм $t_P(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{T}_P(S^4,\Gamma)$. Очевидно, что решение системы $\mathbf{S}=\{t_P(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1)|P\notin\mathcal{M}_{sem}\}$ равно множеству $\mathcal{M}_{sem}$, которое таким образом является алгебраическим. По теореме 0.29 заключаем, что полугруппа S является эквациональной областью. ◀

Следствие 2.29. *Пусть конечная простая полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$. Тогда любое непустое множество $M\subseteq S^n$ представимо в виде решения системы уравнений вида $\mathbf{S}=\{t_i(X)=(1,1,1)|1\leq i\leq m\}$, где $t_i(X)\in\mathcal{T}(S^n,\Gamma)$, $m=|S|^n-|M|$.*

Доказательство. Пусть множество $S^n\setminus M$ состоит из точек $P_1,P_2,\ldots,P_m$, где $m=|S|^n-|M|$. Из леммы 2.27 следует существование термов $t_i(X)\in\mathcal{T}_{P_i}(S^n,\Gamma)$ таких, что решение уравнения $t_i(X) = (1,1,1)$ равно $S^n \setminus \{P_i\}$. Следовательно, решение системы $\mathbf{S} = \{t_i(X) = (1,1,1) | 1 \leq i \leq m\}$ совпадает с множеством M. ◀

Следствие 2.30. *Конечная простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, если выполнено хотя бы одно из условий*

1. $|G|^{|\Lambda|-1} < |I|$;

2. $|G|^{|I|-1} < |\Lambda|$;

3. $|\Lambda| = 1$, $|I| > 1$;

4. $|I| = 1$, $|\Lambda| > 1$;

5. $G = \{1\}$ *и хотя бы одно из чисел* $|I|, |\Lambda|$ *больше единицы.*

Доказательство. Доказательство последних трех пунктов непосредственно следует из первых двух утверждений.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Найдем условия на числа $|\Lambda|, |I|$, при которых в матрице $\mathbf{P}$ обязательно найдутся одинаковые строки. В этом случае матрица $\mathbf{P}$ будет вырожденной, и по теореме 2.28 полугруппа S не является эквациональной областью.

Число различных строк вида $(1, g_2, g_3, \ldots, g_{|\Lambda|})$ равно $|G|^{|\Lambda|-1}$ (первый элемент каждой строки равен 1, поскольку первый столбец матрицы $\mathbf{P}$ полностью состоит из единиц). Следовательно, если в матрице $\mathbf{P}$ будет более чем $|G|^{|\Lambda|-1}$ строк (то есть $|G|^{|\Lambda|-1} < |I|$), то среди них обязательно найдутся две одинаковые, и матрица $\mathbf{P}$ будет вырожденной. ◀

Пример 2.31. Рассмотрим конечную простую полугруппу S_{240}, определенную следующей четверкой $(G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$: $G = A_5$ (знакопеременная группа порядка 5), $\Lambda = I = \{1, 2\}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & g \end{pmatrix},$$

где g — произвольный неединичный элемент группы A_5. Порядок полугруппы S_{240} равен $|S_{240}| = |A_5| \cdot 2 \cdot 2 = 240$. Поскольку группа A_5 является эквациональной областью (из результатов [22] таким свойством обладает любая простая неабелева группа), и матрица $\mathbf{P}$ не вырождена, то по теореме 2.28 полугруппа S_{240} является эквациональной областью, но не является группой (следствие 0.6). Таким образом, полугруппа S_{240} решает сформулированную во введении проблему положительно.

Поскольку среди групп не существует нетривиальной эквациональной области G с $|G| < 60$, то не существует нетривиальной конечной простой полугруппы S, которая является эквациональной областью и $|S| < |S_{240}|$.

2.6 Полугруппы с неединичным центром

В данном параграфе произвольная полугруппа S рассматривается в языке $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$.

Теорема 2.32. *Пусть I — левый (правый) идеал полугруппы S, элемент $e \in S$ коммутирует со всеми элементами идеала I, и существует элемент $a \in I$ для которого $ea \neq a$. Тогда полугруппа S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Доказательство. Пусть I — левый идеал (совершенно аналогично рассматривается случай, когда идеал I правый).

Покажем, что множество $\mathcal{M} = \{(x_1, x_2) | x_1 = a \text{ или } x_2 = a\}$ не может быть алгебраическим над S. Предположим противное, а именно: существует система уравнений $\mathbf{S}(x_1, x_2)$ с решением $\mathcal{M}$, и $t(x_1, x_2) = s(x_1, x_2)$ — уравнение системы $\mathbf{S}$, не удовлетворяющее точке (ea, ea).

Будем считать, что уравнение $t(x_1, x_2) = s(x_1, x_2)$ имеет вид

$$c_1 w_1(x_1, x_2) c_2 w_2(x_1, x_2) \dots c_n w_n(x_1, x_2) c_{n+1} = \\ d_1 u_1(x_1, x_2) d_2 u_2(x_1, x_2) \dots d_m u_m(x_1, x_2) d_{m+1},$$

где термы $w_i(x_1, x_2)$, $u_i(x_1, x_2)$ не содержат констант. Через $t'(x_1, x_2)$, $s'(x_1, x_2)$ обозначим выражения

$$t'(x_1, x_2) = c_1 w_1(x_1, x_2) c_2 w_2(x_1, x_2) \dots c_{n-1} w_{n-1}(x_1, x_2) c_n w_n(x_1, x_2),$$

$$s'(x_1, x_2) = d_1 u_1(x_1, x_2) d_2 u_2(x_1, x_2) \dots d_{m-1} u_{m-1}(x_1, x_2) d_m u_m(x_1, x_2).$$

Подставив в уравнение $t(x_1, x_2) = s(x_1, x_2)$ точку $(a, a) \in \mathcal{M}$, получим равенство

$$A = t'(a, a) c_{n+1} = s'(a, a) d_{m+1}. \tag{70}$$

Через n_i обозначим число вхождений переменной x_i в терм $t'(x_1, x_2)$, m_i — число вхождений переменной x_i в терм $s'(x_1, x_2)$.

Подставим в уравнение $t(x_1, x_2) = s(x_1, x_2)$ точку $(ea, a) \in \mathcal{M}$ и рассмотрим, как будет происходить вычисление значения терма $t'(ea, a)$. Поскольку в запись выражений $w_i(ea, a)$ входят элемент левого идеала a и коммутирующий с ним элемент e, то все вхождения e можно вынести в правую часть выражения $w_i(ea, a) = w_i(a, a) e^{k_i}$, где k_i — число вхождений переменной x_i в терм $w_i(x_1, x_2)$. Таким образом, выражение $t'(ea, a)$ записывается в виде

$$t'(ea, a) = c_1 w_1(a, a) e^{k_1} c_2 w_2(a, a) e^{k_2} \dots c_{n-1} w_{n-1}(a, a) e^{k_{n-1}} c_n w_n(a, a) e^{k_n}.$$

Так как $c_n w_n(a, a) \in I$, то элемент e коммутирует с $c_n w_n(a, a)$, и поэтому

$$t'(ea, a) = c_1 w_1(a, a) e^{k_1} c_2 w_2(a, a) e^{k_2} \dots c_{n-1} w_{n-1}(a, a) c_n w_n(a, a) e^{k_{n-1}} e^{k_n}.$$

Поступая подобным образом, все вхождения элемента e можно переместить в конец выражения

$$t'(ea, a) = c_1 w_1(a, a) c_2 w_2(a, a) \dots c_{n-1} w_{n-1}(a, a) c_n w_n(a, a) e^{k_1} e^{k_2} \dots e^{k_{n-1}} e^{k_n} =$$
$$c_1 w_1(a, a) c_2 w_2(a, a) \dots c_{n-1} w_{n-1}(a, a) c_n w_n(a, a) e^{n_1} = t'(a, a) e^{n_1}.$$

Поскольку элемент $t'(a, a)$ принадлежит идеалу I, то все вхождения e можно переместить в начало выражения $t'(ea, a)$ и получить равенство:

$$t(ea, a) = e^{n_1} t'(a, a) c_{n+1}.$$

С помощью аналогичных рассуждений вычисляем значение правой части уравнения

$$s(ea, a) = e^{m_1} s'(a, a) c_{m+1}.$$

Следовательно,

$$e^{n_1} t'(ea, a) c_{n+1} = e^{m_1} s'(a, a) d_{m+1}. \qquad (71)$$

С помощью описанного выше метода можно показать, что подстановки точек $(a, ea) \in \mathcal{M}$, $(ea, ea) \notin \mathcal{M}$ дают соответственно равенство

$$e^{n_2} t'(a, a) c_{n+1} = e^{m_2} s'(a, a) d_{m+1} \qquad (72)$$

и неравенство

$$e^{n_1+n_2} t'(a, a) c_{n+1} \neq e^{m_1+m_2} s'(a, a) d_{m+1}. \qquad (73)$$

Используя равенства (70,71,72), получаем

$$e^{n_1+n_2} t'(a, a) c_{n+1} = e^{n_2}(e^{n_1} A) = e^{n_2}(e^{m_1} A) = e^{m_1}(e^{n_2} A) = e^{m_1} e^{m_2} A =$$
$$e^{m_1+m_2} s'(a, a) d_{m+1},$$

что противоречит неравенству (73). ◀

Следующий результат легко следует из теоремы 2.32, если положить $I = S$.

Теорема 2.33. *Любая полугруппа S с нееденичным центром (то есть в S существуют центральный элемент e и $a \in S$ такие, что $ae \neq a$) не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Следствие 2.34. *Верны следующие утверждения:*

1. *любая нетривиальная полугруппа S с нулем не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$;*

2. *любая нетривиальная коммутативная полугруппа S не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$;*

3. *если гомогруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, то S — группа (иными словами, $S = Ker(S)$).*

Доказательство. Доказательства первых двух утверждений очевидным образом следуют из теоремы 2.33. Докажем третье утверждение.

Пусть e — единица ядра $Ker(S)$ гомогруппы S. По теореме 0.7 e принадлежит центру полугруппы S. Если предположить существование элемента $a \in S \setminus Ker(S)$, то $ae \in Ker(S)$ и поэтому $ae \neq a$. Следовательно, элемент e не является единицей всей полугруппы S и по теореме 2.33 полугруппа S не может быть эквациональной областью. ◀

2.7 Конечные полугруппы

В данном параграфе мы будем рассматривать полугруппы в языке $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$. Также мы предполагаем, что любая полугруппа S ниже имеет конечный минимальный двусторонний идеал (ядро) $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ (во введении было показано, что ядро всегда просто, и поэтому удовлетворяет теореме 0.3). Обозначим

$$\Gamma = \{(1, g, 1) | g \in G\} \subseteq S, \tag{74}$$

$$L_i = \{(\lambda, g, i) | g \in G, \lambda \in \Lambda\} \subseteq K,$$

$$R_\lambda = \{(\lambda, g, i) | g \in G, i \in I\} \subseteq K.$$

Легко показать, что Γ образует подгруппу в S изоморфную G, $L_1 \cap R_1 = \Gamma$ и каждое множество L_i (R_λ) является левым (правым) идеалом полугруппы S.

Лемма 2.35. *Пусть ядро полугруппы S имеет представление $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$. Тогда для любого $\alpha \in S$ существуют элементы $g_\alpha \in G$, $\lambda_\alpha \in \Lambda$, $i_\alpha \in I$ такие, что*

1. $\alpha(1, 1, 1) = (\lambda_\alpha, g_\alpha, 1)$,
2. $\alpha(1, g, i) = (\lambda_\alpha, g_\alpha g, i)$,
3. $(1, 1, 1)\alpha = (1, g_\alpha, i_\alpha)$,
4. $(\lambda, g, 1)\alpha = (\lambda, g g_\alpha, i_\alpha)$,

Доказательство. Докажем все утверждения леммы.

1. Так как множество L_1 является левым идеалом, то элемент $\alpha(1, 1, 1)$ имеет вид $(\lambda_\alpha, g_\alpha, 1)$ для некоторых λ_α, g_α.

2. $$\alpha(1, g, i) = \alpha(1, 1, 1)(1, g, i) = (\lambda_\alpha, g_\alpha, 1)(1, g, i) = (\lambda_\alpha, g_\alpha g, i).$$

3. Так как множество R_1 является правым идеалом, то элемент $(1, 1, 1)\alpha$ имеет вид $(1, h_\alpha, i_\alpha)$ для некоторых i_α, h_α. Покажем теперь, что $h_\alpha = g_\alpha$:

   $$(1, 1, 1)(\alpha(1, 1, 1)) = (1, 1, 1)(\lambda_\alpha, g_\alpha, 1) = (1, g_\alpha, 1).$$

   С другой стороны,

   $$((1, 1, 1)\alpha)(1, 1, 1) = (1, h_\alpha, i_\alpha)(1, 1, 1) = (1, h_\alpha, 1),$$

   следовательно, $h_\alpha = g_\alpha$.

4.

$$(\lambda, g, 1)\alpha = (\lambda, g, 1)(1, 1, 1)\alpha = (\lambda, g, 1)(1, g_\alpha, i_\alpha) = (\lambda, gg_\alpha, i_\alpha).$$

◀

Из утверждений леммы 2.35 для любого элемента $\alpha \in S$ следуют соотношения:

$$\alpha x = (\lambda_\alpha, g_\alpha, 1)x \text{ для всех } x \in L_1 \tag{75}$$

$$x\alpha = x(1, g_\alpha, i_\alpha) \text{ для всех } x \in R_1 \tag{76}$$

$$\alpha x = (\lambda_\alpha, g_\alpha, 1)x,\ x\alpha = x(1, g_\alpha, i_\alpha) \text{ для всех } x \in \Gamma \tag{77}$$

Лемма 2.36. *Если полугруппа S с ядром $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, то группа G должна быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_g(G)$.*

Доказательство. Поскольку полугруппа S является эквациональной областью, то множество пар $\mathcal{M} = \{(x, y) | x = (1, 1, 1) \text{ или } y = (1, 1, 1)\} \subseteq S^2$ является алгебраическим над S, то есть существует система уравнений $\mathbf{S}(x, y)$ с константами из S и решением $\mathcal{M}$.

Покажем, что среди уравнений системы $\mathbf{S}$ не может быть уравнений вида $t(x, y) = \alpha$, где $\alpha \in S \setminus K$. В самом деле, значение терма $t(x, y)$ в точке $((1, 1, 1), (1, 1, 1)) \in M$ принадлежит идеалу K, и равенство $t((1, 1, 1), (1, 1, 1)) = \alpha$ невозможно.

Следовательно, все части уравнений системы $\mathbf{S}$ содержат вхождения переменных. Применяя к уравнениям системы $\mathbf{S}$ формулы (77) получим, что система $\mathbf{S}$ эквивалентна над Γ системе уравнений $\tilde{\mathbf{S}}$ с константами из K.

Покажем, что в системе $\tilde{\mathbf{S}}$ нет ни одного уравнения, одна часть которого начинается (заканчивается) на константу, а вторая часть начинается (заканчивается) на переменную. Действительно, если $(\lambda, g, i)t(x, y) = xs(x, y) \in \tilde{\mathbf{S}}$, то данное уравнение не удовлетворяет точке $((\mu, h, j), (1, 1, 1)) \in \mathcal{M}$, где $\mu \neq \lambda$.

Таким образом, обе части уравнений системы $\tilde{\mathbf{S}}$ либо начинаются (заканчиваются) на константы, либо обе части уравнения начинаются и заканчиваются на переменные. Применяя к таким уравнениям формулы (63–69), мы получим систему уравнений $\mathbf{S}'$ с константами из Γ, которая эквивалентна $\tilde{\mathbf{S}}$ над Γ.

Следовательно, $\mathrm{V}_\Gamma(\mathbf{S}') = \{(x, y) | x = (1, 1, 1) \text{ или } y = (1, 1, 1)\} \subseteq \Gamma^2$, и по теореме 0.30 группа Γ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_g(\Gamma)$. Изоморфизм между группами Γ, G доказывает лемму. ◀

Лемма 2.37. *Если полугруппа S с ядром $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, то матрица $\mathbf{P}$ должна быть невырожденной.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа S является эквациональной областью при вырожденной матрице $\mathbf{P}$, у которой строки с номерами i, j одинаковы (случай, когда матрица $\mathbf{P}$ имеет одинаковые столбцы, рассматривается аналогично).

Так как полугруппа S — эквациональная область, то существует система уравнений $\mathbf{S}(x, y, z)$ с решением

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) | x = (1, 1, i) \text{ или } y = (1, 1, i) \text{ или } z = (1, 1, i)\},$$

и пусть $t(x, y, z) = s(x, y, z)$ — произвольное уравнение системы $\mathbf{S}$, не удовлетворяющее точке $Q = ((1, 1, j), (1, 1, j), (1, 1, j))$.

В соответствии с формулой (75) уравнение $t(x, y, z) = s(x, y, z)$ эквивалентно над полугруппой L_1 уравнению одного из следующих типов

1. $t'(x, y, z) = s'(x, y, z)$;
2. $t'(x, y, z)\alpha = s'(x, y, z)\beta$;
3. $t'(x, y, z)\alpha = s'(x, y, z)$;
4. $t'(x, y, z) = s'(x, y, z)\beta$;
5. $t'(x, y, z)\alpha = \beta$;
6. $t'(x, y, z) = \beta$,

где все константы термов $t'(x, y, z), s'(x, y, z)$ принадлежат ядру K, $\alpha, \beta \in S \setminus K$.

Рассмотрим только второй тип уравнения $t(x, y, z) = s(x, y, z)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Поскольку термы $t(x, y, z), s(x, y, z)$ заканчиваются на константы, то можно считать, что термы $t'(x, y, z)$,$s'(x, y, z)$ либо заканчиваются на переменную, либо полностью состоят из констант.

Пусть терм $t'(x, y, z)$ заканчивается на переменную x, а терм $s'(x, y, z)$ заканчивается на переменную y (аналогично рассматриваются случаи, когда оба терма заканчиваются на одинаковую переменную или один из термов полностью состоит из констант). Рассмотрим термы от одной переменной $t''(z) = t'((1, 1, j), (1, 1, j), z)$,

$s''(z) = s'((1,1,j),(1,1,j),z)$. Поскольку все константы термов $t''(z)$, $s''(z)$ принадлежат ядру K, а сами термы заканчиваются на константу, то из леммы 2.17 следуют равенства

$$t''((1,1,i)) = t''((1,1,j)),\ s''((1,1,i)) = s''((1,1,j)).$$

Так как $((1,1,j),(1,1,j),(1,1,i)) \in \mathcal{M}$, то

$$t'((1,1,j),(1,1,j),(1,1,i))\alpha = s'((1,1,j),(1,1,j),(1,1,i))\beta.$$

Из полученных выше равенств имеем

$$t'((1,1,j),(1,1,j),(1,1,j))\alpha = s'((1,1,j),(1,1,j),(1,1,j))\beta,$$

но это противоречит выбору уравнения $t(x,y,z) = s(x,y,z)$. ◄

Теорема 2.38. *Пусть полугруппа S имеет ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ и является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, тогда ядро $K \subseteq S$, является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$.*

Доказательство. Из леммы 2.36 следует, что группа G должна быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_g(G)$, а из леммы 2.37 мы получаем, что матрица $\mathbf{P}$ должна быть невырожденной. Применяя теорему 2.28, получаем, что ядро K является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$. ◄

Внутренние трансляции элементов идеала Пусть полугруппа S имеет двусторонний идеал I. Отображение $f_\alpha(x)\colon I \to I$ называется *внутренней левой (правой) трансляцией идеала* I, если существует такой $\alpha \in S$, что $f_\alpha(x) = \alpha x$ ($f_\alpha(x) = x\alpha$) для всех $x \in I$. Если элементы $\alpha, \beta \in S$ определяют одинаковые внутреннюю левую и правую трансляции, то такие элементы будем называть *эквивалентными* и обозначать $\alpha \sim_I \beta$. Отношение эквивалентности $\sim_I$ будем называть *тривиальным*, если каждый класс эквивалентности состоит ровно из одного элемента полугруппы S (в этом случае отношение эквивалентности $\sim_I$ совпадает с предикатом равенства на полугруппе S).

Замечание 2.39. *Отметим, что отношение $\sim_I$ близко к известному в теории полугрупп понятию слабой редуктивности. А именно: полугруппа S слабо редуктивна тогда и только тогда, когда отношение $\sim_S$ тривиально.*

Лемма 2.40. *Пусть полугруппа S имеет двусторонний идеал I и для элементов $\alpha, \beta \in S$ выполнено $\alpha \sim_I \beta$. Тогда для любого терма $t(x, y)$, содержащего вхождения переменной y, справедливо равенство*

$$t(\alpha, r) = t(\beta, r) \tag{78}$$

для всех $r \in I$.

Доказательство. Пусть $t(x, y)$ — терм языка $\mathcal{L}_s(S)$. *Длиной* $|t(x, y)|$ терма $t(x, y)$ будем называть длину слова $t(x, y)$ в алфавите $X \cup \{s | s \in S\}$. Например, $|xs_1y^2| = 4$, $|x| = |s_2| = 1$.

Рассмотрим различные виды терма $t(x, y)$.

1. Пусть $t(x, y) = v(x)y^n$. Докажем утверждение леммы индукцией по длине терма $v(x)$.

   Если $|v(x)| = 1$, то терм $v(x)$ либо константа $\mathbf{c}$ либо $v(x) = x$. Если $v(x) = \mathbf{c}$ равенство (78) очевидно выполнено. Если $v(x) = x$, то по условию леммы мы получаем $\alpha r = \beta r$, и поэтому равенство (78) также выполнено.

   Пусть равенство (78) выполнено для всех термов длины меньшей n, и пусть $|v(x)| = n$. Тогда либо $v(x) = v'(x)\mathbf{c}$ либо $v(x) = v'(x)x$, где $|v'(x)| = n - 1$.

   Если $v(x) = v'(x)\mathbf{c}$, то мы используем $\mathbf{c}r^n \in I$ и применяем предположение индукции:
   $$t(\alpha, r) = v'(\alpha)(\mathbf{c}r^n) = v'(\beta)(\mathbf{c}r^n) = t(\beta, r).$$

   Для терма $v(x) = v'(x)x$ доказательство аналогичное.

2. Рассмотрение терма вида $t(x, y) = y^n v(x)$ аналогично предыдущему случаю.

3. Рассмотрим наиболее общий вид терма $t(x, y)$:
   $$t(x, y) = w_1(x)y^{n_1}w_2(x)y^{n_2} \dots w_m(x)y^{n_m}w_{m+1}(x),$$
   где термы $w_1(x), w_{m+1}(x)$ могут быть пустыми словами.

   Мы докажем утверждение леммы с помощью индукции по m. Если $m = 1$, то вид терма $t(x, y)$ был рассмотрен выше.

   По предположению индукции имеем $t'(\alpha, r) = t'(\beta, r) = r' \in I$, где
   $$t'(x, y) = w_1(x)y^{n_1}w_2(x)y^{n_2} \dots w_{m-1}(x)y^{n_{m-1}}w_m(x).$$

Рассмотрим терм $s(x,y) = y^{n_m} w_{m+1}(x)$. По доказанному выше имеем

$$s(\alpha, r) = s(\beta, r).$$

Таким образом,

$$t(\alpha, r) = r' s(\alpha, r) = r' s(\beta, r) = t(\beta, r),$$

и мы поучаем (78).

◀

Заметим, что утверждение леммы 2.40 не верно для термов $t(x,y)$, которые фиктивно зависят от переменной y (то есть в запись терма $t(x,y)$ переменная y не входит).

Теорема 2.41. *Пусть полугруппа S имеет двусторонний идеал I. Если отношение эквивалентности $\sim_I$ нетривиально, то полугруппа S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Доказательство. Обозначим через X множество из четырех переменных $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Если $I = \{r\}$, то элемент r является нулем полугруппы S, и по следствию 2.34 полугруппа S не является эквациональной областью. Поэтому далее r_1, r_2 — два различных элемента идеала I.

По условию существуют различные элементы $\alpha, \beta \in S$ такие, что $\alpha \sim_I \beta$.

Предположим противное, а именно: множество $\mathcal{M}_{sem} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_2$ или $x_3 = x_4\}$ является решением системы $\mathbf{S}(X)$ и пусть $t(X) = s(X)$ некоторое уравнение системы $\mathbf{S}$, не удовлетворяющее точке $(\alpha, \beta, r_1, r_2)$.

В зависимости от типа частей уравнения $t(X) = s(X)$ имеем один из следующих случаев:

1. Не все переменные из множества X входят в уравнение.

2. Переменные из множеств $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$ входят в обе части уравнения.

3. Переменные из множества $\{x_3, x_4\}$ входят ровно в одну из частей уравнения, и переменные из множества $\{x_1, x_2\}$ входят в обе части уравнения.

4. Переменные из множества $\{x_1, x_2\}$ входят ровно в одну из частей уравнения, и переменные из множества $\{x_3, x_4\}$ входят в обе части уравнения.

5. Одна из частей уравнения зависит только от переменных из множества $\{x_1, x_2\}$, вторая часть уравнения зависит только от переменных множества $\{x_3, x_4\}$.

6. Одна из частей уравнения не содержит переменных.

Последовательно рассмотрим все случаи.

1. Не ограничивая общности можно считать, что уравнение $t(X) = s(X)$ не содержит вхождений переменной x_4, то есть $t(x_1, x_2, x_3) = s(x_1, x_2, x_3)$. Так как $(\alpha, \beta, r_1, r_1) \in \mathcal{M}_{sem}$, то имеем равенство $t(\alpha, \beta, r_1) = s(\alpha, \beta, r_1)$. Однако точка $(\alpha, \beta, r_1, r_2)$ не удовлетворяет уравнению $t(X) = s(X)$, то есть выполнено неравенство $t(\alpha, \beta, r_1) \neq s(\alpha, \beta, r_1)$, и мы приходим к противоречию.

2. Согласно лемме 2.40 имеем равенства:

$$t(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = t(\alpha, \beta, r_1, r_2),\ s(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = s(\alpha, \beta, r_1, r_2),$$

откуда следует

$$t(\alpha, \beta, r_1, r_2) = s(\alpha, \beta, r_1, r_2),\ \text{так как}\ t(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = s(\alpha, \alpha, r_1, r_2),$$

что противоречит выбору уравнения $t(X) = s(X)$.

3. Пусть уравнение $t(X) = s(X)$ имеет вид $t(x_1, x_2) = s(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Согласно лемме 2.40 имеем равенство:

$$s(\alpha, \alpha, r_1, r_1) = s(\alpha, \beta, r_1, r_1).$$

Поскольку $(\alpha, \alpha, r_1, r_1), (\alpha, \beta, r_1, r_1) \in \mathcal{M}_{sem}$, то

$$t(\alpha, \alpha) = s(\alpha, \alpha, r_1, r_1),\ t(\alpha, \beta) = s(\alpha, \beta, r_1, r_1),$$

откуда $t(\alpha, \alpha) = t(\alpha, \beta)$.

Ввиду $(\alpha, \alpha, r_1, r_2) \in \mathcal{M}_{sem}$ и леммы 2.40 имеем равенства

$$t(\alpha, \alpha) = s(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = s(\alpha, \beta, r_1, r_2).$$

Следовательно,

$$t(\alpha, \beta) = s(\alpha, \beta, r_1, r_2),$$

что противоречит выбору уравнения $t(X) = s(X)$.

4. Пусть уравнение $t(X) = s(X)$ имеет вид $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_3, x_4)$. Для точки $(\alpha, \alpha, r_1, r_2) \in \mathcal{M}_{sem}$ имеем равенство

$$t(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = s(r_1, r_2).$$

Согласно лемме 2.40 получаем

$$t(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = t(\alpha, \beta, r_1, r_2),$$

откуда

$$t(\alpha, \beta, r_1, r_2) = s(r_1, r_2),$$

что противоречит выбору уравнения $t(X) = s(X)$.

5. Пусть уравнение $t(X) = s(X)$ имеет вид $t(x_1, x_2) = s(x_3, x_4)$. Для точек $(\alpha, \alpha, r_1, r_1), (\alpha, \beta, r_1, r_1), (\alpha, \alpha, r_1, r_2) \in \mathcal{M}_{sem}$ имеем равенства

$$t(\alpha, \alpha) = s(r_1, r_1),\ t(\alpha, \beta) = s(r_1, r_1),\ t(\alpha, \alpha) = s(r_1, r_2),$$

откуда следует $t(\alpha, \beta) = s(r_1, r_2)$, что противоречит выбору уравнения $t(X) = s(X)$.

6. Пусть уравнение $t(X) = s(X)$ имеет вид $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c} \in S$. По лемме 2.40 равенство $t(\alpha, \alpha, r_1, r_2) = \mathbf{c}$ влечет $t(\alpha, \beta, r_1, r_2) = \mathbf{c}$, что противоречит выбору уравнения $t(X) = s(X)$.

◀

Следствие 2.42. *Любая бесконечная полугруппа S с конечным идеалом I не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Лемма 2.43. *Пусть полугруппа S имеет ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$. Тогда для любого элемента $\alpha \in S$ существует элемент $g_\alpha \in G$, и отображения $\Lambda_\alpha \colon \Lambda \to \Lambda$, $I_\alpha \colon I \to I$ такие, что*

1. $\alpha(\lambda, 1, 1) = (\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda}, 1)$,
2. $(1, 1, i)\alpha = (1, p_{i\Lambda_\alpha(1)} g_\alpha, I_\alpha(i))$,
3. $\alpha(\lambda, g, i) = (\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda} g, i)$,
4. $(\lambda, g, i)\alpha = (\lambda, g p_{i\Lambda_\alpha(1)} g_\alpha, I_\alpha(i))$.

Доказательство. Полагаем $I_\alpha(1) = i_\alpha$, $\Lambda_\alpha(1) = \lambda_\alpha$, где индексы i_α, λ_α определены в лемме 2.35.

Докажем каждое из утверждений леммы.

1. Элемент $\alpha(\lambda, 1, 1)$ принадлежит левому идеалу L_1, и поэтому он имеет вид $\alpha(\lambda, 1, 1) = (\Lambda_\alpha(\lambda), G_\alpha(\lambda), 1)$, где $G_\alpha(\lambda)\colon \Lambda \to G$ — некоторая функция, зависящая от λ.

   Найдем значения функции $G_\alpha(\lambda)$, вычислив выражение

   $$(1,1,1)(\alpha(\lambda,1,1)) = (1,1,1)(\Lambda_\alpha(\lambda), G_\alpha(\lambda), 1) = (1, G_\alpha(\lambda), 1).$$

   С другой стороны, применяя лемму 2.35,

   $$((1,1,1)\alpha)(\lambda,1,1) = (1, g_\alpha, i_\alpha)(\lambda,1,1) = (1, g_\alpha p_{i_\alpha \lambda}, 1) = (1, g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda}, 1),$$

   откуда следует, что $G_\alpha(\lambda) = g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda}$.

2. Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущего утверждения.

3. $$\alpha(\lambda, g, i) = \alpha(\lambda,1,1)(1,g,i) = (\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda}, 1)(1,g,i) = (\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha p_{I_\alpha(1)\lambda} g, i),$$

4. $$(\lambda, g, i)\alpha = (\lambda, g, 1)(1,1,i)\alpha = (\lambda, g, 1)(1, p_{i\Lambda_\alpha(1)} g_\alpha, I_\alpha(i)) = (\lambda, g p_{i\Lambda_\alpha(1)} g_\alpha, I_\alpha(i)).$$

◀

Критерий для полугрупп с конечным идеалом Пусть полугруппа S имеет конечное ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$, и $M \subseteq S^n$. Через $\mathcal{T}^n$ будем обозначать множество всех термов языка $\mathcal{L}_s(S)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с константами из K, значения которых принадлежат подгруппе Γ, определенной формулой (74), для всех точек $P \in S^n$. Например, термы $t(x) = (1,g,2)x(3,h,1)$, $s(x,y) = (1,g,1)x^2(3,h,4)y(2,f,1)$ принадлежат множествам $\mathcal{T}^1$, $\mathcal{T}^2$ соответственно.

Лемма 2.44. *Пусть полугруппа S имеет конечное ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$, где матрица $\mathbf{P}$ не вырождена, и отношение эквивалентности $\sim_K$ тривиально. Тогда для* *любой пары различных элементов $\alpha, \beta \in S$ существует терм $t(x) \in \mathcal{T}^1$ такой, что $t(\alpha) \neq t(\beta)$.*

Доказательство. По условию существует элемент $(\lambda, g, i) \in K$ такой, что $\alpha(\lambda, g, i) \neq \beta(\lambda, g, i)$ (аналогично рассматривается случай $(\lambda, g, i)\alpha \neq (\lambda, g, i)\beta$). В соответствии с леммой 2.43 имеем равенства

$$\alpha(\lambda, g, i) = (\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha g, i),$$

$$\beta(\lambda, g, i) = (\Lambda_\beta(\lambda), g_\beta g, i).$$

Имеем ровно две возможности.

1. Пусть $g_\alpha \neq g_\beta$. Рассмотрим терм $t(x) = (1,1,1)x(\lambda,1,1) \in \mathcal{T}^1$, значения которого равны
$$t(\alpha) = (1,1,1)\alpha(\lambda,1,1) = (1,1,1)(\Lambda_\alpha(\lambda), g_\alpha, 1) = (1, g_\alpha, 1),$$
$$t(\beta) = (1,1,1)\beta(\lambda,1,1) = (1,1,1)(\Lambda_\beta(\lambda), g_\beta, 1) = (1, g_\beta, 1),$$
и поэтому $t(\alpha) \neq t(\beta)$.

2. Пусть $g_\alpha = g_\beta = g$ и $\Lambda_\alpha(\lambda) \neq \Lambda_\beta(\lambda)$. Поскольку матрица $\mathbf{P}$ не вырождена, то существует индекс i такой, что $p_{i\Lambda_\alpha(\lambda)} \neq p_{i\Lambda_\beta(\lambda)}$. Рассмотрим терм $t(x) = (1,1,i)x(\lambda,1,1) \in \mathcal{T}^1$, значения которого равны
$$t(\alpha) = (1,1,i)\alpha(\lambda,1,1) = (1,1,i)(\Lambda_\alpha(\lambda), g, 1) = (1, p_{i\Lambda_\alpha(\lambda)}g, 1),$$
$$t(\beta) = (1,1,i)\beta(\lambda,1,1) = (1,1,i)(\Lambda_\beta(\lambda), g, 1) = (1, p_{i\Lambda_\beta(\lambda)}g, 1),$$
и поэтому $t(\alpha) \neq t(\beta)$.

◀

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in S^n$. Через $\mathcal{T}^n_P(M)$ (где $P \in M \subseteq S^n$) обозначим множество всех термов $t(X) \in \mathcal{T}^n$ таких, что $t(P) \neq (1,1,1)$, и $t(Q) = (1,1,1)$ для всех $Q \in M \setminus \{P\}$.

Лемма 2.45. *Пусть конечная полугруппа S имеет ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$, отношение эквивалентности $\sim_K$ тривиально и полугруппа K является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$. Тогда для любого натурального числа n и произвольной точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in S^n$ множество $\mathcal{T}^n_P(S^n)$*

1. *не пусто;*

2. *вместе с каждый термом $t(X)$ множество $\mathcal{T}_P^n(S^n)$ содержит все термы вида $(1, g, 1)t(X)(1, g^{-1}, 1)$, $g \in G$.*

Доказательство. Второе свойство множеств $\mathcal{T}_P^n(S^n)$ легко следует из первого. Пусть $t(X) \in \mathcal{T}_P^n(S^n)$, тогда:

$$(1, g, 1)t(Q)(1, g^{-1}, 1) = (1, g, 1)(1, 1, 1)(1, g^{-1}, 1) = (1, g1g^{-1}, 1) = (1, 1, 1),$$

$$(1, g, 1)t(P)(1, g^{-1}, 1) = (1, g, 1)(1, h, 1)(1, g^{-1}, 1) = (1, ghg^{-1}, 1) \neq (1, 1, 1), \text{ так как } h \neq 1.$$

Докажем теперь, что множество $\mathcal{T}_P^n(S^n)$ не пусто.

Далее будем использовать следующее обозначение (поскольку $|K| < \infty$, то $|G| < \infty$ и поэтому следующее выражение определено):

$$t^{-1}(X) = t^{|G|-1}(X)$$

Очевидно, что для любого терма $t(X) \in \mathcal{T}^n$ выполнено $t^{-1}(X) \in \mathcal{T}^n$, и

$$t(X)t^{-1}(X) = t^{-1}(X)t(X) = t^{|G|}(X) = (1, 1, 1) \text{ для всех } X \in S^n.$$

Докажем непустоту множества $\mathcal{T}_P(M)$ индукцией по мощности множества $M \subseteq S^n$. Пусть $|M| = 2$, и $P, Q \subseteq S^n$ — две различные точки множества M.

Без ограничения общности можно считать, что точки P, Q различаются первой координатой: $p_1 \neq q_1$. По лемме 2.44 существует терм $t(x) \in \mathcal{T}^1$ со свойством $t(p_1) \neq t(q_1)$. Рассмотрим терм $s(X) = t(x_1)t^{-1}(q_1) \in \mathcal{T}^1$, который принимает значения $s(P) = t(p_1)t^{-1}(q_1) \neq (1, 1, 1)$, $s(Q) = t(q_1)t^{-1}(q_1) = (1, 1, 1)$. Следовательно, $s(X) \in \mathcal{T}_P^n(M)$.

Предположим, что для всех множеств M, содержащих не более чем m элементов, утверждение леммы доказано. Докажем лемму для множества M при $|M| = m + 1$.

Пусть $P, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — все элементы множества M. По предположению существуют термы

$$t(X) \in \mathcal{T}_P^n(\{P, Q_2, Q_3, \ldots, Q_m\}), s(X) \in \mathcal{T}_P^n(\{P, Q_1, Q_3, \ldots, Q_m\}),$$

принимающие значения:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & P & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_m \\
t(X) & (1, g_1, 1) & (1, h_1, 1) & (1, 1, 1) & (1, 1, 1) & \dots & (1, 1, 1) \\
s(X) & (1, g_2, 1) & (1, 1, 1) & (1, h_2, 1) & (1, 1, 1) & \dots & (1, 1, 1)
\end{array}
$$

Заметим, что в качестве g_1, g_2 можно взять элементы группы G, которые не коммутируют друг с другом. Действительно, по второму свойству множества $\mathcal{T}_P^n(S^n)$ в качестве g_2 можно взять любой элемент из класса сопряженности $\{gg_2g^{-1}|g \in G\}$. Если же g_1 коммутирует со всеми элементами класса сопряженности элемента g_2, то g_1 является делителем нуля в группе G, и по теореме 0.31 группа G не является эквациональной областью, что противоречит теореме 2.28.

Рассмотрим терм

$$p(X) = [t(X), s(X)] = t^{-1}(X)s^{-1}(X)t(X)s(X) \in \mathcal{T}^1,$$

значения которого равны

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & P & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_m \\
p(X) & [[g_1, g_2]; 1, 1] & (1, 1, 1) & (1, 1, 1) & (1, 1, 1) & \dots & (1, 1, 1)
\end{array}
$$

где через $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \neq 1$ обозначен коммутатор элементов g_1, g_2 в группе G.

Следовательно, $p(X) \in \mathcal{T}_P^n(M)$, что доказывает лемму. ◀

Теорема 2.46. *Полугруппа S с конечным ядром $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *ядро K является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$;*

2. *отношение эквивалентности $\sim_K$ тривиально*

(из второго условия следует, что эквациональная область S с конечным ядром должна быть конечной полугруппой).

Доказательство. Необходимость следует из теорем 2.38, 2.41.

Докажем достаточность. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_{sem} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = x_2$ или $x_3 = x_4\} \subseteq S^4$. По лемме 2.45 для каждой точки $P \notin \mathcal{M}_{sem}$ существует терм $t_P(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{T}_P^4(S^4)$. Очевидно, что решение системы $\mathbf{S} = \{t_P(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1)|P \notin \mathcal{M}_{sem}\}$ равно множеству $\mathcal{M}_{sem}$, которое таким образом является алгебраическим. По теореме 0.29 заключаем, что полугруппа S является эквациональной областью. ◀

Следствие 2.47. *Пусть полугруппа S с конечным ядром K является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$. Тогда любое непустое множество $M \subseteq S^n$ представимо в виде решения системы уравнений вида $\mathbf{S} = \{t_i(X) = (1,1,1) | i \in \mathcal{I}\}$, где $t_i(X) \in \mathcal{T}^n$.*

Доказательство. Заметим, что согласно следствию 2.42 полугруппа S должна быть конечной.

Пусть $S^n \setminus M = \{P_i | i \in \mathcal{I}\}$. Из леммы 2.45 следует существование термов $t_i(X) \in \mathcal{T}_{P_i}(S^n)$ таких, что решение уравнения $t_i(X) = (1,1,1)$ равно $S^n \setminus \{P_i\}$. Следовательно, решение системы $\mathbf{S} = \{t_i(X) = (1,1,1) | i \in \mathcal{I}\}$ совпадает с множеством M. ◄

3 Алгебраическая геометрия над свободной полурешеткой

3.1 Предварительные сведения

В данной главе будут рассматриваться уравнения над свободной полурешеткой $\mathcal{F}$ бесконечного ранга. Полурешетку $\mathcal{F}$ мы будем рассматривать в языке $\mathcal{L}_s(\mathcal{F}) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in \mathcal{F}\}$.

Ниже через $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ мы будем обозначать конечное множество переменных, и $F(X)$ — свободная полурешетка, порожденная множеством X.

Используя определение $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-терма, коммутативности и идемпотентности полурешеток, мы получаем, что каждый терм эквивалентен над $\mathcal{F}$ одному из следующих выражений: $w(X)\mathbf{a}$, $w(X)$, $\mathbf{a}$, где $w(X) \in F(X)$, и $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$. Если $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-терм $\tau(X)$ не содержит элемента $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$, то терм $\tau(X)$ называется *бескоэффициентным.*

Замечание 3.1. *Далее бескоэффициентные $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-термы обозначаются с помощью латинских букв. С помощью греческих букв мы будем обозначать $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-термы, которые могут содержать элемент $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$.*

В качестве примеров $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-уравнений можно привести следующие выражения $x_1x_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = x_1x_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4$, $x_1x_2\mathbf{a}_2 = x_3x_4$. Элементы свободной полурешетки $\mathcal{F}$, входящие в запись уравнения, мы будем для краткости называть константами.

Часто в уравнении мы будем использовать знак $\leq$ вместо $=$, поскольку любое неравенство может быть заменено на эквивалентное ему уравнение:

$$\tau(X) \leq \sigma(X) \Leftrightarrow \tau(X)\sigma(X) = \tau(X).$$

Обозначим через $\mathcal{F}^1$ полурешетку, получаемую из $\mathcal{F}$ с помощью присоединения единичного элемента. Система $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-уравнений $\mathbf{S}$ называется *однородной*, если существуют бескоэффициентные термы $t(X), s(X)$ такие, что $\mathbf{S} = \{t(X)\mathbf{b}_i = s(X)\mathbf{c}_i \mid i \in \mathcal{I}, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in \mathcal{F}^1\}$. Однородные системы далее будем обозначать через $\mathbf{S}_{t,s}$.

Поскольку множество всевозможных пар бескоэффициентных термов конечно, то любая система $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-уравнений $\mathbf{S}$ эквивалентна конечному объединению подсистем

$$\mathbf{S} = \bigcup_{t,s} \mathbf{S}_{t,s}(X). \tag{79}$$

Полурешетка с выделенной подполурешеткой изоморфной $\mathcal{F}$ называется *$\mathcal{F}$-полурешеткой*. Более формально, *$\mathcal{F}$-полурешетка* — это полурешетка S с фиксированным вложением $\varepsilon_S \colon \mathcal{F} \to S$. *Ниже любую $\mathcal{F}$-полурешетку мы будем рассматривать как алгебраическую систему языка $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$, в которой интерпретация константных символов языка $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$ образует подполурешетку изоморфную $\mathcal{F}$.* Это, например, означает, что ниже любой гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}(S,T)$ $\mathcal{F}$-полурешеток биективно отображает подполурешетку $\mathcal{F} \subseteq S$, образованную константами, в образованную константами подполурешетку $\mathcal{F} \subseteq T$ (см. определение в параграфе 0.4).

Пусть Y — непустое алгебраическое множество. Различные элементы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}$ (как $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-термы) не могут быть Y-эквивалентны друг другу, следовательно, свободная полурешетка $\mathcal{F}$ вкладывается в любую координатную полурешетку $\Gamma(Y)$. Иными словами, любая координатная полурешетка непустого алгебраического множества над $\mathcal{F}$ является $\mathcal{F}$-полурешеткой.

3.2 Нетеровость по совместным системам

В данном параграфе мы опишем решения однородных систем уравнений над свободной полурешеткой $\mathcal{F}$ и докажем, что полурешетка $\mathcal{F}$ нетерова по совместным системам уравнений.

Имеем три типа уравнений над $\mathcal{F}$, зависящих от не более чем двух переменных:

1. $x\mathbf{ac} = \mathbf{ad}$,

2. $x\mathbf{ac} = x\mathbf{ad}$,

3. $x\mathbf{ac} = y\mathbf{ad}$,

где $\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c} \in \mathcal{F}^1$, и пары элементов $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{d})$ взаимно просты.

Найдем решения данных уравнений.

1.
$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(x\mathbf{ac} = \mathbf{ad}) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } \mathbf{c} \neq 1, \\ \{\mathbf{a}'\mathbf{d} \mid \mathbf{a}' \geq \mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{F}^1\}, \text{ если } \mathbf{c} = 1 \end{cases} .$$

2.
$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(x\mathbf{ac} = x\mathbf{ad}) = \{\mathbf{a}'\mathbf{cdt} \mid \mathbf{a}', \mathbf{t} \in \mathcal{F}^1,\ \mathbf{a}' \geq \mathbf{a}\},$$

3.
$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(x\mathbf{ac} = y\mathbf{ad}) = \{(\mathbf{a}'\mathbf{dt}, \mathbf{a}''\mathbf{ct}) \mid \mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{t} \in \mathcal{F}^1,\ \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \mathbf{a}\}.$$

Рассмотрим теперь однородные системы уравнений от не более чем двух переменных над $\mathcal{F}$.

1. Пусть $\mathbf{S} = \{x\mathbf{e}_i\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i\mathbf{d}_i \mid i \in I\}$. Поскольку множество решений каждого из уравнений системы $\mathbf{S}$ либо конечно либо пусто, то система $\mathbf{S}$ эквивалентна своей конечной подсистеме.

2. Пусть элементы $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{F}$ взаимно просты, и $\mathbf{S} = \{x\mathbf{e}_i\mathbf{c} = y\mathbf{e}_i\mathbf{d} \mid i \in I\}$. Пусть $\mathbf{e}$ — точная верхняя грань множества $\{\mathbf{e}_i\}$ в полурешетке $\mathcal{F}^1$. Поскольку $\mathcal{F}^1$ не содержит бесконечных возрастающих цепей, то элемент $\mathbf{e}$ является точной верхней гранью некоторого конечного множества $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \{\mathbf{e}_i \mid i \in I\}$. Непосредственно проверяется, что система $\mathbf{S}$ эквивалентна своей конечной подсистеме $\{x\mathbf{e}_i\mathbf{c} = y\mathbf{e}_i\mathbf{d} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

3. Система $\mathbf{S} = \{x\mathbf{e}_i\mathbf{c} = x\mathbf{e}_i\mathbf{d} \mid i \in I\}$ получается из рассмотренной выше с помощью замены y на x.

4. Рассмотрим теперь наиболее общий вид системы уравнений от не более чем двух переменных $\mathbf{S} = \{x\mathbf{e}_i\mathbf{c}_i = y\mathbf{e}_i\mathbf{d}_i \mid i \in I\}$. Если множество $\{\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i \mid i \in I\}$ не имеет точной нижней грани, то система $\mathbf{S}$ несовместна. В противном случае положим $\mathbf{f} = \inf\{\mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i\}$. Поскольку существует лишь конечное множество различных $\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{d}_i$, которые больше $\mathbf{f}$, система $\mathbf{S}$ может быть представлена как конечное объединение

$$\mathbf{S} = \bigcup_{\mathbf{c},\mathbf{d} \geq \mathbf{f}} \mathbf{S}_{\mathbf{c},\mathbf{d}} = \bigcup_{\mathbf{c},\mathbf{d} \geq \mathbf{f}} \{x\mathbf{e}_j\mathbf{c} = y\mathbf{e}_j\mathbf{d} \mid j \in I_{\mathbf{c},\mathbf{d}}\}.$$

Выше мы доказали, что каждая система $\mathbf{S}_{\mathbf{c},\mathbf{d}}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Следовательно, и для $\mathbf{S}$ существует эквивалентная ей конечная подсистема.

Таким образом, мы получили

Лемма 3.2. *Любая совместная однородная система от не более чем двух переменных эквивалентна своей конечной подсистеме над полурешеткой $\mathcal{F}$.*

Поскольку любая однородная система $\mathbf{S}_{t,s}$ с помощью замены $\mathbf{x} = t(X)$, $\mathbf{y} = s(X)$ может быть представлена как система от не более чем двух переменных, то мы получаем

Лемма 3.3. *Любая совместная однородная система эквивалентна своей конечной подсистеме над полурешеткой $\mathcal{F}$.*

Согласно формуле (79) любая система уравнений над $\mathcal{F}$ представима в виде объединения конечного числа однородных систем. Следовательно, верна следующая

Теорема 3.4. *Любая совместная система уравнений над $\mathcal{F}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Иными словами, полурешетка $\mathcal{F}$ нетерова по совместным системам.*

3.3 Неприводимые координатные полурешетки над $\mathcal{F}$

Основная цель данного параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{F}$ — свободная полурешетка бесконечного ранга, с множеством свободных порождающих $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$; S — конечно порожденная $\mathcal{F}$-полурешетка и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *S является координатной $\mathcal{F}$-полурешеткой некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{F}$;*
2. *S вложима (как алгебраическая система языка $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$) в $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ для некоторого $n < \omega$, где $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ — свободная полурешетка, порожденная множеством $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$;*
3. *на S истинны универсальные формулы $\Sigma = \{\varphi_i, \psi_i \mid i \in \mathcal{I}\}$,*

$$\varphi_i\colon\ \forall x, y\, (x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i \to (x\mathbf{a}_i = y \vee x = y\mathbf{a}_i \vee x = y))\,, \tag{80}$$

$$\psi_i\colon\ \forall x, y\, (xy \leq \mathbf{a}_i \to (x \leq \mathbf{a}_i \vee y \leq \mathbf{a}_i))\,. \tag{81}$$

Доказательство теоремы разобьем на три части.

$(1) \Rightarrow (3)$ **Лемма 3.6.** *Все формулы множества Σ истинны в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{F} \models \varphi_i$. Рассмотрим уравнение $x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i$. Нетрудно проверить, что решением данного уравнения в полурешетке $\mathcal{F}$ будет объединение трех компонент:

$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i) = \{(t, \mathbf{a}_i t) \mid t \in \mathcal{F}\} \cup \{(\mathbf{a}_i t, t) \mid t \in \mathcal{F}\} \cup \{(t, t) \mid t \in \mathcal{F}\}$$

Поскольку для любой точки из первой (второй, третьей) компоненты выполнено $y = \mathbf{a}_i x$ (соответственно: $x = \mathbf{a}_i y$ и $x = y$), из равенства $x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i$ следует дизъюнкция $x\mathbf{a}_i = y \vee x = y\mathbf{a}_i \vee x = y$. Таким образом, $\mathcal{F} \models \varphi_i$.

Теперь докажем $\mathcal{F} \models \psi_i$. Рассмотрим уравнение $xy \leq \mathbf{a}_i$, которое по определению частичного порядка $\leq$ эквивалентно уравнению $xy\mathbf{a}_i = xy$. Поскольку буква $\mathbf{a}_i$ входит в левую часть уравнения, то элементы из правой части уравнения также должны содержать в своей записи букву $\mathbf{a}_i$. Следовательно, x или y содержит $\mathbf{a}_i$. Это означает, что $x \leq \mathbf{a}_i$ или $y \leq \mathbf{a}_i$, и мы получаем $\mathcal{F} \models \psi_i$. ◀

Таким образом, все формулы из множества Σ истинны в $\mathcal{F}$. По теореме 0.25 имеем $S \in \mathrm{ucl}(\mathcal{F})$, и поэтому $S \models \Sigma$.

(2) $\Rightarrow$ (1) В силу теоремы 0.25 достаточно показать, что полурешетка $S = \mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ дискриминируется свободной полурешеткой $\mathcal{F}$ (тогда и любая подполурешетка в $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ также будет дискриминироваться $\mathcal{F}$).

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_u$ — набор различных элементов $\mathcal{F}$-полурешетки S. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех свободных порождающих $\mathbf{a}_i \in \mathcal{F}$, которые входят в запись слов $\{s_i \mid 1 \leq i \leq u\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$.

Рассмотрим отображение $\psi\colon S \to \mathcal{F}$:

$$\psi(t_i) = \mathbf{a}_{m+i}, \text{ для всех } 1 \leq i \leq n \text{ и } \psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \text{ для всех } \mathbf{a} \in \mathcal{F}.$$

Из определения непосредственно следует, что ψ является гомоморфизмом.

Докажем $\psi(s_i) \neq \psi(s_j)$ для всех $i \neq j$.

Рассмотрим элементы $s_i = \mathbf{a}t$, $s_j = \mathbf{a}'t'$, где $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{F}^1$, и t, t' — слова,состоящие из букв $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

1. Допустим, что $t \neq t'$. Следовательно, существует буква t_k, которая входит в t и не содержится в t', то есть $t_k \geq t$, $t_k \ngeq t'$ (аналогично можно рассмотреть случай, когда $t_k \ngeq t$, $t_k \geq t'$). Следовательно, образ $\psi(t)$ содержит $\mathbf{a}_{m+k}$, но при этом образ $\psi(t')$ буквы $\mathbf{a}_{m+k}$ не содержит. По определению гомоморфизма ψ, буква $\mathbf{a}_{m+k}$ не входит в слова $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$. Таким образом, $\psi(s_i) \leq \mathbf{a}_{m+k}$, $\psi(s_j) \nleq \mathbf{a}_{m+k}$ и поэтому $\psi(s_i) \neq \psi(s_j)$.

2. Пусть $t = t'$ и $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$. Следовательно, существует буква $\mathbf{a}_k$ такая, что $\mathbf{a}_k \geq \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_k \ngeq \mathbf{a}'$ (аналогично можно рассмотреть случай, когда $\mathbf{a}_k \ngeq \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_k \geq \mathbf{a}'$). Иными словами, слово $\mathbf{a}$ содержит букву $\mathbf{a}_k$, но при этом слово $\mathbf{a}'$ не содержит букву $\mathbf{a}_k$. По определению гомоморфизма ψ буква $\mathbf{a}_k$ не входит в запись слов $\psi(t), \psi(t')$. Таким образом, $\psi(s_i) \leq \mathbf{a}_k$, $\psi(s_j) \nleq \mathbf{a}_k$, и поэтому $\psi(s_i) \neq \psi(s_j)$.

Мы получили, что $\psi(s_i) \neq \psi(s_j)$ для всех $i \neq j$. Следовательно, полурешетка $\mathcal{F}$ дискриминирует полурешетку S, и по теореме 0.25 S является координатной полурешеткой некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{F}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) **Лемма 3.7.** *Следующая формула истинна в* S *для любого* $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$*:*

$$\varphi_{\mathbf{a}}\colon\ \forall x, y \left(x\mathbf{a} = y\mathbf{a} \to \bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \mathbf{a}} x\mathbf{a}' = y\mathbf{a}'' \right), \tag{82}$$

где дизъюнкция берется по всем взаимно простым $\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathcal{F}^1$*.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы с помощью индукции по длине слова $\mathbf{a}$. Если $\mid \mathbf{a} \mid= 1$, то формула $\varphi_{\mathbf{a}}$ совпадает с одной из формул φ_i, которая по условию истинна в S. Предположим, что утверждение леммы верно для любого слова $\mathbf{a}$ при $\mid \mathbf{a} \mid< n$, и докажем лемму для произвольного слова $\mathbf{a}$ длины n. Пусть $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_i$, где $\mid \bar{\mathbf{a}} \mid= n - 1$.

Имеем (ниже элементы $\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathcal{F}^1$ взаимно просты):

$$x\mathbf{a} = y\mathbf{a} \to (x\mathbf{a}_i)\bar{\mathbf{a}} = (y\mathbf{a}_i)\bar{\mathbf{a}} \to \bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}} (x\mathbf{a}_i)\mathbf{a}' = (y\mathbf{a}_i)\mathbf{a}'' \to$$
$$\bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}} (x\mathbf{a}')\mathbf{a}_i = (y\mathbf{a}'')\mathbf{a}_i \to \bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}} x\mathbf{a}'\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}'' \vee \bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}} x\mathbf{a}' = y\mathbf{a}''\mathbf{a}_i \vee$$
$$\bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}} x\mathbf{a}' = y\mathbf{a}'' \to \bigvee_{\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \geq \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_i} x\mathbf{a}' = y\mathbf{a}'',$$

и мы получили $\varphi_{\mathbf{a}}$. ◀

Лемма 3.8. *Следующая формула истинна в* S *для любых взаимно простых* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}$*:*

$$\varphi_{\mathbf{ab}}\colon\ \forall x, y (x\mathbf{a} = y\mathbf{b} \to (x \leq \mathbf{b}) \& (y \leq \mathbf{b})) \tag{83}$$

Доказательство. Равенство $x\mathbf{a} = y\mathbf{b}$ влечет $x\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}_i$ для любой буквы $\mathbf{a}_i$, входящей в запись $\mathbf{b}$. Поскольку элементы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ взаимно просты, то по формуле ψ_i $\mathbf{a}_i \geq x$. Таким образом, $x \leq \mathbf{b}$. Аналогично доказывается, что $y \leq \mathbf{a}$. ◀

Рассмотрим множество $\mathcal{F}_s = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{F}^1, \mathbf{a} \geq s\} \subseteq \mathcal{F}$, где $s \in S$. Множество $\mathcal{F}_s$ не пусто, поскольку $1 \in \mathcal{F}_s$ для любого $s \in S$. Определим отображение $h\colon S \to \mathcal{F}^1$ как

$$h(s) = \min \mathcal{F}_s.$$

Покажем, что отображение h определено для любого $s \in S$. Непосредственно проверяется, что множество $\mathcal{F}_s$ является полурешеткой. Если $\mid \mathcal{F}_s \mid< \infty$, то в полурешетке $\mathcal{F}_s$ существует наименьший элемент, и значение $h(s)$ определено. Если же в $\mathcal{F}_s$ существует бесконечная цепь элементов $\mathbf{b}_1 > \mathbf{b}_2 > \ldots > \mathbf{b}_n > \ldots$, $\mathbf{b}_i > s$, то мы получаем, что множество $\mathrm{Hom}(S, \mathcal{F})$ пусто (элемент s не может быть гомоморфно отображен в $\mathcal{F}$). Последнее противоречит условию доказываемой теоремы.

Лемма 3.9. *Отображение h является гомоморфизмом полурешетки S.*

Доказательство. Из определения отображения h сразу следует $h(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ для всех $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$. Кроме того, h сохраняет порядок, поэтому $h(s_1 s_2) \leq h(s_1)h(s_2)$ для любых $s_1, s_2 \in S$. Пусть буква $\mathbf{a}_k$ входит в запись элемента $h(s_1 s_2) = \mathbf{c}$. Это означает $s_1 s_2 \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{a}_k$. Согласно формуле ψ_k, имеем $s_i \leq \mathbf{a}_k$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, то есть $h(s_1)h(s_2) \leq h(s_i) \leq \mathbf{a}_k$ и поэтому $h(s_1)h(s_2) \leq \mathbf{c} = h(s_1 s_2)$. ◀

Определим отношение эквивалентности на элементах полурешетки S:

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow \text{ существуют } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}^1 \text{ такие, что } s_1\mathbf{a} = s_2\mathbf{b}.$$

Из определения отношения $\sim$ сразу следует, что для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}$ выполнено $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$. Обозначим через $[s]$ класс эквивалентности, содержащий элемент $s \in S$, и пусть $[\mathbf{a}]$ — класс, содержащий все элементы полурешетки $\mathcal{F}$.

Пусть $s_1 \sim s_2$, $t_1 \sim t_2$, тогда существуют $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathcal{F}^1$ такие, что $s_1\mathbf{a} = s_2\mathbf{a}'$, $t_1\mathbf{b} = t_2\mathbf{b}'$. Перемножая равенства, получаем

$$s_1 t_1 \mathbf{a}\mathbf{b} = s_2 t_2 \mathbf{a}'\mathbf{b}'.$$

Следовательно, $s_1 t_1 \sim s_2 t_2$, и поэтому отношение $\sim$ является конгруэнцией. Обозначим через S' фактор-полурешетку $S/\sim$, и гомоморфизм $g\colon S \to S'$, который каждому элементу $s \in S$ ставит в соответствие его класс эквивалентности. Так как для любого $s \in S$ выполнено $[s][\mathbf{a}] = [s]$, то элемент $[\mathbf{a}]$ является единицей полурешетки S'.

Пусть $f(s) = (g(s), h(s))$ — отображение полурешетки S в $S' \times \mathcal{F}'$. Поскольку $g(\mathcal{F}) = 1$, и h является гомоморфизмом, то $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ для всех $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$. Следовательно, $f \in \mathrm{Hom}(S, S' \times \mathcal{F})$

Докажем, что f является вложением. Пусть $f(s) = f(t)$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $g(s) = g(t)$ и $h(s) = h(t)$. В силу первого равенства существуют $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}^1$ со свойством

$$s\mathbf{a} = t\mathbf{b}. \tag{84}$$

Если элементы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ не являются взаимно простыми, то по формуле (82), в полурешетке S выполнено

$$s\mathbf{a}' = t\mathbf{b}'$$

для некоторых взаимно простых $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ таких, что $\mathbf{a}' \geq \mathbf{a}$, $\mathbf{b}' \geq \mathbf{b}$. Таким образом, можно изначально предполагать, что элементы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в равенстве (84) взаимно просты. Для взаимно простых $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ можно применить формулу $\varphi_{\mathbf{ab}}$ (83) и получить $s \leq \mathbf{b}$, $t \leq \mathbf{a}$. Обозначим $\mathbf{c} = h(s) = h(t)$. В соответствии с определением гомоморфизма h имеем неравенства $s \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$, $t \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{a}$. Следовательно, $s \leq \mathbf{a}$, $t \leq \mathbf{b}$, и равенство (84) превращается в $s = t$, что противоречит выбору элементов s, t.

Таким образом, мы получили, что полурешетка S вложима в $S' \times \mathcal{F}^1$. Поскольку полурешетка S' конечно порождена, то по Теореме 0.2 существует натуральное число n такое, что S' вкладывается в свободную полурешетку, порожденную элементами $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Следовательно, полурешетка S вложима в полурешетку $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ и импликация (3) $\Rightarrow$ (2) Теоремы 3.5 доказана.

Фактически вместе с Теоремой 3.5 был доказан следующий результат.

Теорема 3.10. *Пусть $\mathcal{F} = \{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ — свободная полурешетка бесконечного ранга, S — конечно определенная $\mathcal{F}$-полурешетка. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *S является координатной $\mathcal{F}$-полурешеткой некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{F}$;*

2. *S вложима в $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$, где $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ — свободная полурешетка, порожденная множеством $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$;*

3. *на S истинны универсальные формулы $\Sigma = \{\varphi_i, \psi_i \mid i \in \mathcal{I}\}$,*

$$\varphi_i\colon\ \forall x, y\, (x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i \leftrightarrow (x\mathbf{a}_i = y \vee x = y\mathbf{a}_i \vee x = y))$$

$$\psi_i\colon\ \forall x, y\, (xy \leq \mathbf{a}_i \to (x \leq \mathbf{a}_i \vee y \leq \mathbf{a}_i))\,.$$

Доказательство. В доказательстве Теоремы 3.5 условие $\mathrm{Hom}(S, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ использовалось только в определении гомоморфизма h. Рассмотрим определение гомоморфизма h в случае, когда полурешетка S конечно определена. Как и ранее, образ $h(s)$ равен минимальному элементу полурешетки $\mathcal{F}_s$.

Значение $h(s)$ может быть не определено, если существует бесконечная цепь элементов $\mathbf{b}_i \in \mathcal{F}$, $\mathbf{b}_1 > \mathbf{b}_2 > \ldots > \mathbf{b}_n > \ldots$ такая, что $\mathbf{b}_i > s$. Покажем, что такая цепь не может существовать в конечно определенной полурешетке S.

Поскольку множество определяющих соотношений R полурешетки S конечно, то не ограничивая общности можно считать, что все элементы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \ldots$ не входят ни в одно из соотношений множества R (в противном случае можно отбросить конечное число элементов из начала цепи и рассматривать цепь, образованную оставшимися элементами). Легко видеть, что все уравнения из конгруэнтного замыкания $[R]$ либо не содержат $\mathbf{b}_i$, либо $\mathbf{b}_i$ входит в обе части уравнения (последнее возможно, например, при рассмотрении произведения соотношений из R с использованием тривиального уравнения $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$). Следовательно, из соотношений R не могут следовать равенства $\mathbf{b}_{i+1}\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1}$. Таким образом, в полугруппе S не выполнено $\mathbf{b}_{i+1} \leq \mathbf{b}_i$.

Итак, мы получили, что значение гомоморфизма h определено для любого элемента полурешетки S, и поэтому последующее доказательство данной теоремы совпадает с доказательством теоремы 3.5. ◀

Теоремы 3.5, 3.10 содержат описание неприводимых координатных $\mathcal{F}$-полурешеток над $\mathcal{F}$. Используя утверждение 0.21, можно переформулировать указанные теоремы в терминах алгебраических множеств.

Теорема 3.11. *Пусть Y — непустое множество решений системы $\mathbf{S}(X)$. Множество Y неприводимо, и $[\mathbf{S}] = \mathrm{Rad}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S})$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{F}$-полурешетке, заданной представлением $S = \langle X \mid \mathbf{S}\rangle$, истинны формулы (80)–(81).*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathrm{Hom}(S, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ для любого непустого множества решений Y системы $\mathbf{S}(X)$, а затем применить Теорему 3.5. ◀

Укажем еще два непосредственных следствия из Теоремы 3.5.

Следствие 3.12. *Пусть множество Y является решением системы $\mathbf{S}$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Множество $Y \subseteq \mathcal{F}^n$ неприводимо тогда и только тогда, когда существуют бескоэффициентные термы $w_1(T), w_2(T), \ldots, w_n(T)$ от переменных $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ и элементы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{F}^1$ такие, что*

$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}) = \{(w_1(T)\mathbf{b}_1, w_2(T)\mathbf{b}_2, \ldots, w_n(T)\mathbf{b}_n) \mid T \subseteq \mathcal{F}\} \tag{85}$$

Доказательство. Пусть S — координатная $\mathcal{F}$-полурешетка алгебраического множества $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S})$. По Теореме 3.5 Y неприводимо тогда и только тогда, когда каждый элемент $x_i \in S$ представим в виде $w_i(T)\mathbf{b}_i \in \mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_m]$, и мы получаем формулу (85). ◀

Пример 3.13. Опишем неформально алгоритм получения представления (85) на примере системы $\mathbf{S} = \{xy\mathbf{a}_1 = z\mathbf{a}_2, y \le \mathbf{a}_2\}$.

Вначале найдем бескоэффициентные термы $w_i(T)$. Для этого удалим из уравнений системы $\mathbf{S}$ все константы. Получаем $\mathrm{cf}(\mathbf{S}) = \{xy = z\}$ (уравнение $y \le \mathbf{a}_2$ дает тривиальное равенство $y = y$). Координатная полурешетка множества $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cf}(\mathbf{S}))$ представима в виде $S = \langle x, y, z \mid xy = z\rangle$. Полурешетка S вложима в свободную полурешетку ранга 2: $x \mapsto t_1$, $y \mapsto t_2$, $z \mapsto t_1t_2$. Таким образом, термы w_1, w_2, w_3 равны t_1, t_2, t_1t_2 соответственно.

Теперь осталось найти константы $\mathbf{b}_i$. Равенство $xy\mathbf{a}_1 = z\mathbf{a}_2$ в полурешетке $\mathcal{F}$ влечет $z \le \mathbf{a}_1$ и $xy \le \mathbf{a}_2$. Поскольку $y \le \mathbf{a}_2 \in \mathbf{S}$, мы получаем $xy \le \mathbf{a}_2$ для любого $x \in \mathcal{F}$. То есть на переменную x нет никаких ограничений сверху. Окончательно получаем

$$x = t_1,\ y = t_2\mathbf{a}_2,\ z = t_1t_2\mathbf{a}_1,$$

и поэтому

$$Y = \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}) = \{(t_1, t_2\mathbf{a}_2, t_1t_2\mathbf{a}_1) \mid t_1, t_2 \in \mathcal{F}\}.$$

3.4 Проблема совместности конечных систем уравнений над $\mathcal{F}$

В данном параграфе мы опишем процедуру, которая по заданной конечной системе $\mathbf{S}$ проверяет справедливость равенства $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

ПРОЦЕДУРА

ВХОД: конечная система $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-уравнений $\mathbf{S}$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
ВЫХОД: подсистема $Sys \subseteq \mathbf{S}$ и множество переменных C
ШАГ 0. Полагаем $Sys := \emptyset$, $C := \emptyset$.
ШАГ i ($i \geq 1$). Пусть $\mathbf{S}_i \subseteq \mathbf{S}$ — множество всех уравнений $\sigma(X) = \tau(X)$ из $\mathbf{S}$ таких, что по крайней мере один из термов $\sigma(X), \tau(X)$ либо равен некоторому $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$ либо зависит только от переменных множества C. Пусть $X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ — переменные, входящие в систему $\mathbf{S}_i$. Полагаем

$$C := C \cup X_i, \; Sys := Sys \cup \mathbf{S}_i$$

Если на некотором шаге $\mathbf{S}_i = \emptyset$, процедура заканчивает свою работу.

Подсистему Sys, определенную в Процедуре, мы будем называть *ядром* системы $\mathbf{S}$ и обозначать через $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$.

Пример 3.14. Рассмотрим систему

$$\mathbf{S} = \{x_1x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2, x_3\mathbf{a}_2 = x_1\mathbf{a}_1, x_4\mathbf{a}_1 = x_2x_3\mathbf{a}_2, x_5x_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4 = x_5x_4\mathbf{a}_2\}.$$

Если к системе $\mathbf{S}$ применить Процедуру, то мы последовательно получим следующие множества переменных $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3\}$, $X_3 = \{x_4\}$. Ядро системы $\mathbf{S}$ при этом равно

$$\mathrm{Core}(\mathbf{S}) = \{x_1x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2, x_3\mathbf{a}_2 = x_1\mathbf{a}_1, x_4\mathbf{a}_1 = x_2x_3\mathbf{a}_2\}, \tag{86}$$

Теорема 3.15. *Пусть для системы* $\mathbf{S}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *Процедура построила множество переменных* C *и ядро* $\mathrm{Core}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{S}$. *Не ограничивая общности, можно считать, что* $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *($k \leq n$). Обозначим* $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \setminus \mathrm{Core}(\mathbf{S})$. *Тогда:*

1. *множество решений* $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$ *конечно и может быть найдено алгоритмически;*

2. *система* $\mathbf{S}$ *совместна тогда и только тогда, когда совестно ядро* $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$*;*

3. *если* $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Core}(\mathbf{S})) = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$*, где*

$$P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}),$$

то

$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{S}_0 \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j = p_{ij}\} \right). \tag{87}$$

Поясним утверждения Теоремы 3.15 с помощью системы уравнений $\mathbf{S}$ из Примера 3.14

Пример 3.16. Множество решений (86) действительно конечно:

$$\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Core}(\mathbf{S})) = \{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2), (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)\}.$$

Совместность ядра $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$ влечет совместность всей системы $\mathbf{S}$. Например, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4) \in \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S})$, что согласуется со вторым утверждением Теоремы 3.15.

По формуле (87) система $\mathbf{S}$ эквивалентна объединению решений следующих систем:

$$\mathbf{S} = \begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_2, \\ x_2 = \mathbf{a}_2, \\ x_3 = \mathbf{a}_1, \\ x_4 = \mathbf{a}_2, \\ x_5 x_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 = x_5 x_4 \mathbf{a}_2 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_2, \\ x_2 = \mathbf{a}_2, \\ x_3 = \mathbf{a}_1, \\ x_4 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \\ x_5 x_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 = x_5 x_4 \mathbf{a}_2 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_2, \\ x_2 = \mathbf{a}_2, \\ x_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \\ x_4 = \mathbf{a}_2, \\ x_5 x_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 = x_5 x_4 \mathbf{a}_2 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x_1 = \mathbf{a}_2, \\ x_2 = \mathbf{a}_2, \\ x_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \\ x_4 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2, \\ x_5 x_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 = x_5 x_4 \mathbf{a}_2 \end{cases}.$$

Перейдем к доказательству Теоремы 3.15.

Доказательство.

1. В соответствии с определением Процедуры множество переменных X_c ядра $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$X_c = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_l.$$

Пусть $\mathbf{S}_i(X_i) \subseteq \mathbf{S}$ — система уравнений, добавляемая в ядро $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$ на i-м шаге Процедуры. Докажем вначале, что $\mid \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}_1) \mid < \infty$.

Система $\mathbf{S}_1$ состоит из уравнений вида $\sigma(X_1) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = \tau(X_1)$. Следовательно, любая переменная x, входящая в $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$-термы $\sigma(X_1), \tau(X_1)$ должна удовлетворять неравенству $x \geq \mathbf{b}$. Поскольку множество $\mathbf{b}\uparrow = \{x \mid x \geq \mathbf{b}\} \subseteq \mathcal{F}$ конечно, то множество решений уравнения $\sigma(X_1) = \mathbf{b}$ (уравнения $\mathbf{b} = \tau(X)$) также конечно. Таким образом, $\mid \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}_1) \mid < \infty$. Заметим также, что поскольку поиск решения уравнений $\sigma(X_1) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = \tau(X_1)$ происходит в конечном множестве $\mathbf{b}\uparrow$, то проблема определения совместности системы $\mathbf{S}_1$ алгоритмически разрешима.

Докажем теперь конечность множества решений системы $\mathbf{S}_i$ $(1 < i \leq l)$. Рассмотрим произвольное уравнение $\sigma(X) = \tau(X')$, правая часть которого зависит от переменных множества $X' = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{i-1}$. По предположению индукции каждая переменная из множества X' может принимать лишь конечное число значений. Следовательно, существует лишь конечное число различных значений правых частей уравнения $\sigma(X) = \tau(X')$. Поскольку множество решений каждого уравнения вида $\sigma(X) = \mathbf{a}$ конечно (и поиск таких решений алгоритмически разрешим), то и $\mid \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\sigma(X) = \tau(X')) \mid < \infty$. Таким образом, $\mid \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}_i) \mid < \infty$, и кроме того, нахождение всех решений системы $\mathbf{S}_i$ алгоритмически разрешимо.

2. Так как $\mathrm{Core}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{S}$, то из равенства $\mathrm{Core}(\mathbf{S}) = \emptyset$, очевидно, следует $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k) \in \mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Core}(\mathbf{S}))$, то есть ядро $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$ совместно. В качестве $\mathbf{a}$ возьмем произведение всех букв $\mathbf{a}_j$, входящих в запись хотя бы одного решения ядра $\mathrm{Core}(\mathbf{S})$. Кроме того рассмотрим элемент $\mathbf{b}$, являющийся произведение всех букв $\mathbf{a}_k$, входящих в запись уравнений из $\mathbf{S}_0$. Так в Примере 3.14 имеем $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4$. Заметим, что определения элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ корректны, поскольку множества $\mathrm{V}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Core}(\mathbf{S}))$, $\mathbf{S}_0$ конечны. Полагаем $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$.

Покажем, что $R = (p_1, \ldots, p_k, \ldots, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{c})$ является решением для S. Действительно, поскольку переменные $x_{k+1}, \ldots, x_n$ не входят в уравнения из $Core(S)$, R является решением для $Core(S)$. Кроме того, для произвольного уравнения

$$s(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{d} = t(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{e}$$

из S_0 термы s, t содержат хотя бы одну переменную из множества $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, то есть

$$s(p_1, \ldots, p_k, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{c}) = t(p_1, \ldots, p_k, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{c}) = \mathbf{c}.$$

Согласно выбору $\mathbf{c}$, имеем $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$, и поэтому

$$s(p_1, \ldots, p_k, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{c} = t(p_1, \ldots, p_k, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{c})\mathbf{e}.$$

Таким образом, R является решением и для S_0, и система $\mathbf{S}$ совместна.

3. Напрямую следует из представления системы $\mathbf{S}$ в виде $\mathbf{S}_0 \cup \mathrm{Core}(\mathbf{S})$.

◀

4 Алгебраическая геометрия в языке с предикатом ‘не равно”

4.1 Предварительные сведения

Вводные главы данной диссертации содержали изложение основ универсальной алгебраической геометрии над алгеброй некоторого *функционального* языка $\mathcal{L}$. Однако, как было показано в [23], определения и теоремы универсальной алгебраической геометрии над функциональными языками можно естественным образом перенести на случай произвольных языков.

Напомним, что согласно (15), определение уравнения над функциональным языком $\mathcal{L}$ фактически совпадает с понятием атомарной формулы в функциональном языке $\mathcal{L}$.

В работе [23] определения и теоремы универсальной алгебраической геометрии были перенесены на алгебры произвольных языков. При данном переносе тождество понятий уравнения и атомарной формулы было сохранено, однако, в языке, содержащем предикатные символы, уравнение уже не обязательно является равенством двух термов (например, если язык содержит предикатный m-местный символ P, то уравнениями будут все выражения вида $P(t_1(X), t_2(X), \dots, t_m(X))$, где $t_i(X)$ — термы).

В данной главе мы, действуя в духе работы [23], прослеживаем перенос результатов универсальной алгебраической геометрии с произвольного функционального языка $\mathcal{L}$ на язык $\mathcal{L}_{\neq} = \mathcal{L} \cup \{\neq\}$, расширенный бинарным предикатным символом $\neq$, который на любой алгебре языка $\mathcal{L}_{\neq}$ будет интерпретироваться естественным образом. Поскольку языки $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\neq}$ обладают одинаковым множеством функциональных и константных символов, то множество термов в языке $\mathcal{L}$ совпадает с множеством термов в языке $\mathcal{L}_{\neq}$. Заметим также, что любое уравнение в языке $\mathcal{L}_{\neq}$ имеет вид $t(X) = s(X)$ или $t(X) \neq s(X)$, где $t(X), s(X)$ — термы языков $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{\neq}$.

Все результаты об алгебраической геометрии над алгебрами функционального языка $\mathcal{L}$ естественно разбиваются на следующие группы:

1. утверждения, которые упрощаются при переходе к языку $\mathcal{L}_{\neq}$;

2. утверждения, которые остаются верными без изменений при переходе к языку

$\mathcal{L}_{\neq}$;

3. утверждения, формулировка которых существенно усложняется при переходе к языку $\mathcal{L}_{\neq}$.

Ниже мы приводим результаты, попадающие в первую группу (само существование таких результатов достаточно неожиданно, поскольку язык $\mathcal{L}_{\neq}$ обладает несколько более сложным видом уравнений, чем язык $\mathcal{L}$). Мы показываем, что при переходе от языка $\mathcal{L}$ к $\mathcal{L}_{\neq}$ существенно упрощается описание неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ и ко-областей (параграф 4.2), нетеровых по уравнениям, q_ω- и u_ω-компактных алгебр (параграф 4.3). Все полученные нами результаты демонстрируются на примере абелевой группы целых чисел $\mathcal{Z}_{\neq}$, рассматриваемой в языке с неравенством $\neq$.

В [23] понятие координатной алгебры было сформулировано и для языков с предикатными символами. В параграфе 4.4 рассматриваются свойства координатных алгебр алгебраических множеств над алгеброй $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$. Проблема здесь заключается в следующем: над алгеброй $\mathcal{A}$ значения предикатов $=, \neq$ согласованы, то есть истинность одного предиката на паре элементов $a, b \in \mathcal{A}$ влечет ложность второго предиката на элементах a, b. Однако может существовать алгебраическое множество Y над $\mathcal{A}$, координатная алгебра $\Gamma(Y)$ которого не имеет согласованных предикатов $=, \neq$ (то есть в $\Gamma(Y)$ существуют элементы a, b, которые "не равны" и "не различны" — для пары a, b ложны оба предиката $=, \neq$). Таким образом, проблема описания координатных алгебр может быть условно отнесена к третьей группе результатов, указанной выше. Тем не менее, основным результатом параграфа 4.4 является теорема 4.10, которая утверждает, что координатная алгебра $\Gamma(Y)$ имеет согласованные предикаты $=, \neq$ тогда и только тогда, когда множество Y неприводимо.

Основные определения универсальной алгебраической геометрии с предикатом "не равно" Дадим формальные определения универсальной алгебраической геометрии над языками с предикатным символом $\neq$.

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный функциональный язык. Обозначим через $\mathcal{L}_{\neq}$ расширение языка $\mathcal{L}$ с помощью добавления бинарного предикатного символа $\neq$. Ясно, что множество термов языка $\mathcal{L}$ совпадает с множеством термов языка $\mathcal{L}_{\neq}$. Алгебраическую систему $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ будем для краткости называть $\mathcal{L}_{\neq}$-алгеброй. *Далее в* *статье мы предполагаем, что предикат $\neq$ интерпретируются на алгебре $\mathcal{A}$ естественным образом.*

Согласно [23], *уравнением в языке $\mathcal{L}_{\neq}$ ($\mathcal{L}_{\neq}$-уравнением)* называется атомарная формула языка $\mathcal{L}_{\neq}$. Ясно, что любое $\mathcal{L}_{\neq}$-уравнение имеет вид $t(X)\#s(X)$, где $t(X), s(X)$ — термы языка $\mathcal{L}_{\neq}$ и $\# \in \{=, \neq\}$. С помощью $\overline{\#}$ мы будем обозначать противоположный к $\#$ предикат, то есть выражения $\overline{=}, \overline{\neq}$ равны предикатам $\neq, =$ соответственно.

Имея определение $\mathcal{L}_{\neq}$-уравнения, можно естественным образом дать определения множества решения, алгебраического множества, неприводимости, радикала, нетеровости по уравнениям и ко-области. Ниже мы приведем только определения q_ω- и u_ω-компактности.

$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется q_ω*-компактной*, если для произвольной системы $\mathcal{L}_{\neq}$-уравнений $\mathbf{S}$ и уравнения $t(X)\#s(X)$ такого, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)\#s(X))$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ с решением

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)\#s(X)).$$

$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется u_ω*-компактной*, если для произвольной системы $\mathcal{L}_{\neq}$-уравнений $\mathbf{S}$ и конечного множества уравнений $t_i(X)\#_i s_i(X)$ ($1 \leq i \leq m$, $\#_i \in \{=, \neq\}$) такого, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)\#_i s_i(X)), \tag{88}$$

существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ с решением

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)\#_i s_i(X)). \tag{89}$$

Пример 4.1. Определим две алгебраические системы таких, что вторая алгебраическая система отличается от первой лишь добавлением в язык предикатного символа $\neq$ с естественной интерпретацией.

Пусть $\mathcal{L}^{ab} = \{+, -, 0\}$ — стандартный язык теории абелевых групп, и $\mathcal{L}^{ab}_{\neq} = \mathcal{L}^{ab} \cup \{\neq\}$. Через $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}_{\neq}$) обозначим алгебраическую систему языка $\mathcal{L}^{ab}$ ($\mathcal{L}^{ab}_{\neq}$) с основным множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, на которых символы языка $\mathcal{L}^{ab}$ ($\mathcal{L}^{ab}_{\neq}$) интерпретируются естественным образом. Из свойств множества $\mathbb{Z}$ легко следует, что любое уравнение от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}_{\neq}$) эквивалентно выражению вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \# 0),$$

где коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ служат для сокращенной записи следующих сумм:

$$\alpha x = \begin{cases} \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\alpha \text{ раз}}, \text{ если } \alpha > 0 \\ \underbrace{-x - x - \ldots - x}_{\alpha \text{ раз}}, \text{ если } \alpha < 0 \\ 0, \text{ если } \alpha = 0 \end{cases}.$$

В следующих примерах будет показано, что свойства систем уравнений над $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_{\neq}$ различаются весьма существенно.

4.2 Неприводимые алгебраические множества и ко-области в языке с предикатом “не равно”

Теорема 4.2. *Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над $\mathcal{L}_{\neq}$-алгеброй $\mathcal{A}$ неприводимо тогда и только тогда, когда для любых термов $t(X), s(X)$ ровно одно из уравнений $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$ принадлежит радикалу множества Y.*

Доказательство. Пусть $Y = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$ для некоторой системы уравнений $\mathbf{S}$.

Докажем необходимость. Допустим, что для некоторых термов $t(X), s(X)$ ни одно из уравнений $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$ не принадлежит радикалу $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$ (если радикалу принадлежат оба уравнения $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$, то в этом случае множество Y должно быть пустым, и поэтому не может быть неприводимым). Из предположения следует, что существуют точки $P, Q \in Y$ такие, что $t(P) \neq s(P)$, $t(Q) = s(Q)$. Следовательно, точки P, Q различны.

Пусть $Y_1 = \mathbf{S} \cup \{t(X) = s(X)\}$, $Y_2 = \mathbf{S} \cup \{t(X) \neq s(X)\}$. Очевидно, что $Y = Y_1 \cup Y_2$. Поскольку $P \notin Y_1$, $Q \notin Y_2$, то $Y_1 \subset Y$, $Y_2 \subset Y$, и поэтому множество Y является приводимым.

Докажем достаточность. Предположим, что множество Y равно объединению

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m \ (\emptyset \subset Y_i \subset Y). \tag{90}$$

Так как $Y_1 \subset Y$, то по свойству радикалов $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) \subset \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_1)$. Следовательно, существует уравнение $\tau(X)\#\sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_1) \setminus \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$. Из условия теоремы получаем $\tau(X)\overline{\#}\sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) \subset \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_1)$. Таким образом, радикал $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y_1)$ содержит несовместные друг с другом уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$, $\tau(X) \neq \sigma(X)$, и следовательно, $Y_1 = \emptyset$, что противоречит разложению (90). ◀

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра. Через $\mathbf{AS}_n$ обозначим класс всех алгебраических множеств пространства A^n. Поскольку класс алгебраических множеств замкнут относительно операции пересечения, то $\mathbf{AS}_n$ является нижней полурешеткой относительно операции пересечения. Минимальным элементом данной полурешетки является пустое множество (множество $\emptyset$ является алгебраическим над $\mathcal{A}$, поскольку $\emptyset = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{x \neq x\})$). Максимальным элементом полурешетки $\mathbf{AS}_n$ является множество A^n (множество A^n также является алгебраическим: $A^n = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{x_i = x_i \mid 1 \leq i \leq n\})$).

Теорема 4.3. *Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над $\mathcal{L}_{\neq}$-алгеброй $\mathcal{A}$ неприводимо тогда и только тогда, когда Y является атомом полурешетки $\mathbf{AS}_n$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, что существует непустое алгебраическое множество $Y' \subset Y$. Для радикалов будем иметь противоположное включение $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) \subset \mathrm{Rad}(Y')$. Следовательно, существует уравнение $\tau(X)\#\sigma(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y') \setminus \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$. По теореме 4.2 радикалу $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$ должно принадлежать уравнение $\tau(X)\overline{\#}\sigma(X)$. Из включения радикалов $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) \subset \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y')$ получаем, что радикал множества Y' содержит несовместные друг с другом уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$, $\tau(X) \neq \sigma(X)$, и следовательно, $Y' = \emptyset$, что противоречит выбору множества Y'.

Докажем достаточность. Если для множества Y справедливо разложение (90), то $Y_i \subset Y$, и множество Y не может быть атомом полурешетки $\mathbf{AS}_n$ ◀

Теорема 4.4. *$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ является ко-областью тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ тривиальна, то есть $|A| = 1$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Из условия теоремы следует, что алгебраические множества

$$A^n = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_n) = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{x_i = x_i \mid 1 \leq i \leq n\})$$

неприводимы и по теореме 4.3 множества A^n являются атомами полурешетки алгебраических множеств $\mathbf{AS}_n$. Если алгебра $\mathcal{A}$ содержит два различных элемента a, b, то для решения системы $\mathbf{S}'_n = \mathbf{S}_n \cup \{x_1 = x_2\}$ выполнено строгое включение $\mathrm{V}(\mathbf{S}'_n) \subset \mathrm{V}_A(\mathbf{S}_n)$ (поскольку $(a, b, a, a, \ldots, a) \in \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_n) \setminus \mathrm{V}_A(\mathbf{S}'_n)$). Следовательно, для множества $Y = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}'_n)$ имеем включения $\emptyset \subset Y \subset A^n$, и поэтому множество A^n не является атомом полурешетки $\mathbf{AS}_n$ — противоречие.

Докажем достаточность. Если $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ тривиальна ($A = \{a\}$), то для каждого $n \geq 1$ существует ровно одно алгебраическое множество $(a, a, \ldots, a) = A^n$, которое очевидным образом не может быть разложено в объединение других алгебраических множеств. Таким образом, $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ является ко-областью. ◀

Отметим, что в языках без предикатного символа $\neq$ теорема 4.4 не верна (см. пример ниже).

Пример 4.5. Добавление предикатного символа $\neq$ в язык существенно меняет семейство неприводимых алгебраических множеств. Согласно [22], алгебраическая система $\mathcal{Z}$ является ко-областью, однако над $\mathcal{Z}_{\neq}$ уже существуют приводимые алгебраические множества:

$$\mathrm{V}_{\mathcal{Z}_{\neq}}(x = x) = \mathrm{V}_{\mathcal{Z}_{\neq}}(x = 0) \cup \mathrm{V}_{\mathcal{Z}_{\neq}}(x \neq 0).$$

4.3 Нетеровость по уравнениям и классы компактности в языках с предикатом "не равно"

Пусть $\mathbf{AS}_n^1$ — класс всех алгебраических множеств $Y \subseteq A^n$ таких, что существует уравнение $t(X)\#s(X)$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с решением Y. Ясно, что каждый элемент полурешетки $\mathbf{AS}_n$ является пересечением (конечным или бесконечным) элементов из множества $\mathbf{AS}_n^1$.

Теорема 4.6. *$\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда класс $\mathbf{AS}_n$ конечен для каждого $n \geq 1$.*

Доказательство.

Легко видеть, что конечность семейства $\mathbf{AS}_n^1$ равносильна конечности $\mathbf{AS}_n$.

Докажем необходимость. Допустим, что $|\mathbf{AS}_n^1| = \infty$. Ниже будет построена последовательность $\mathcal{L}_{\neq}$-систем $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с решениями $Y_i = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_i)$ и для которых выполнено

1. $Y_i \supset Y_{i+1}$;
2. существует бесконечно число уравнений $\mathbf{Eq}_i = \{t_{ij}(X)\#s_{ij}(X) \mid j \in J_i\}$ таких, что множества $Y_i \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{ij}(X)\#s_{ij}(X))$, $Y_i \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{ik}(X)\#s_{ik}(X))$ различны при всех $j \neq k$ $(j, k \in J_i)$.

Полагаем $\mathbf{S}_0 = \{x_i = x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ с решением $Y_0 = A^n$. Для каждого алгебраического множества $Y \in \mathbf{AS}_n^1$ выберем одно уравнение $\tau_Y(X)\#\sigma_Y(X)$ с решением Y. Полагаем $\mathbf{Eq}_0 = \{\tau_Y(X)\#\sigma_Y(X) \mid Y \in \mathbf{AS}_n^1\}$ (теперь все алгебраические множества семейства $\mathbf{AS}_n^1$ определяются ровно одним уравнением из класса $\mathbf{Eq}_0$). Бесконечность семейства $\mathbf{Eq}_0$ следует из бесконечности семейства $\mathbf{AS}_n^1$.

Допустим, что система $\mathbf{S}_{n-1}$ с требуемыми свойствами уже построена. Система $\mathbf{S}_n$ строится следующим образом. Пусть $t(X)\#s(X) \in \mathbf{Eq}_{n-1}$ — уравнение такое, что $Y_{n-1} \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)\#s(X)) \neq Y_{n-1}$ и $Y_{n-1} \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)\#s(X)) \neq \emptyset$ (из второго свойства множества Y_{n-1} такое уравнение всегда существует). Тогда оба множества $Z_= = Y_{n-1} \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$, $Z_{\neq} = Y_{n-1} \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) \neq s(X))$ не пусты. Очевидно, что

$$Y_{n-1} = Z_= \cup Z_{\neq}. \tag{91}$$

Если оба семейства алгебраических множеств

$$\mathcal{Z}_= = \{\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{n-1,j}(X)\#s_{n-1,j}(X)) \cap Z_= \mid j \in J_{n-1}\},$$

$$\mathcal{Z}_{\neq} = \{\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{n-1,j}(X)\# s_{n-1,j}(X)) \cap Z_{\neq} \mid j \in J_{n-1}\}$$

конечны, то конечно и семейство множеств

$$\{(Z_{=} \cup Z_{\neq}) \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{n-1,j}(X)\# s_{n-1,j}(X)) \mid j \in J_{n-1}\} = \{Y_{n-1} \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{n-1,j}(X)\# s_{n-1,j}(X)) \mid j \in J_{n-1}\},$$

что противоречит второму свойству множества Y_{n-1}. Таким образом, хотя бы один из классов $\mathcal{Z}_{=}, \mathcal{Z}_{\neq}$ бесконечен. Пусть $|\mathcal{Z}_{=}| = \infty$ (аналогично рассматривается случай $|\mathcal{Z}_{\neq}| = \infty$). Следовательно, существует бесконечное подмножество индексов $J \subseteq J_{n-1}$ такое, что все множества

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_{n-1,j}(X)\# s_{n-1,j}(X)) \cap Z_{=} \quad (j \in J)$$

различны.

Полагаем $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1} \cup \{t(X) = s(X)\}$, $Y_n = Z_{=} = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}_n)$, $J_n = J$, $\mathbf{Eq}_n = \{t_{n-1,j}(X)\# s_{n-1,j}(X) \mid j \in J_n\}$.

Свойство $Y_n \subset Y_{n-1}$ следует из (91). Второе свойство множества Y_n следует из выбора множества J_n.

Таким образом, мы построили бесконечную убывающую цепочку алгебраических множеств $\{Y_i\}$. По теореме 0.17 заключаем, что $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ не является нетеровой по уравнениям.

Докажем достаточность. Из конечности числа всех алгебраических множеств в пространстве A^n следует, что в A^n не существует бесконечных убывающих цепочек алгебраических множеств, и по теореме 0.17 $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ нетерова по уравнениям. ◀

Пример 4.7. Согласно [20] любая абелева группа (и в частности алгебраическая система $\mathcal{Z}$) нетерова по уравнениям, однако над $\mathcal{Z}_{\neq}$ уже существуют бесконечные системы уравнений, не эквивалентные никакой своей конечной подсистеме. В самом деле, рассмотрим систему уравнений

$$\mathbf{S} = \{ax + by \neq 0 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Для любой точки $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ системе $\mathbf{S}$ принадлежит уравнение $y_0x - x_0y \neq 0$, которому точка P, очевидно, не удовлетворяет. Следовательно, система $\mathbf{S}$ несовместна.

С другой стороны любая конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ совместна (решением $\mathbf{S}'$ является все множество $\mathbb{Z}^2$ за исключением конечного числа прямых), и поэтому алгебраическая система $\mathcal{Z}_{\neq}$ не является нетеровой по уравнениям.

Теорема 4.8. *Для $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебры $\mathcal{A}$ следующие три условия эквивалентны:*

1. *алгебра $\mathcal{A}$ u_ω-компактна;*

2. *алгебра $\mathcal{A}$ q_ω-компактна;*

3. *над $\mathcal{A}$ не существует бесконечной несовместной системы уравнений, у которой все конечные подсистемы совместны.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Непосредственно следует из определения классов q_ω- и u_ω-компактных алгебр.

(2) $\Rightarrow$ (3). Следует из теоремы 0.27.

(3) $\Rightarrow$ (1). Рассмотрим систему $\mathbf{S}$ с решением Y и уравнения $t_i(X)\#_i s_i(X)$ такие, что

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)\#_i s_i(X)),$$

где $1 \leq i \leq m$, $\#_i \in \{=, \neq\}$.

Если $Y = \emptyset$, то по условию система $\mathbf{S}$ имеет конечную несовместную подсистему $\mathbf{S}'$, для которой, очевидно, выполнено включение

$$\emptyset = \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)\#_i s_i(X)).$$

Таким образом, далее считаем, что $Y \neq \emptyset$. Из выбора уравнений $t_i(X)\#_i s_i(X)$ следует, что система $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} \cup \{t_i(X)\overline{\#}_i s_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}$ несовместна. По условию система $\mathbf{S}_1$ содержит конечную несовместную подсистему $\mathbf{S}_1'$. Систему $\mathbf{S}_1'$ можно представить в виде $\mathbf{S}_1' = \mathbf{S}' \cup \{t_i(X)\overline{\#}_i s_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}$, где $\mathbf{S}'$ — конечная подсистема системы $\mathbf{S}$. Поскольку система $\mathbf{S}$ совместна, то совместна и система $\mathbf{S}'$. Но из несовместности системы $\mathbf{S}_1'$ следует $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \cap \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\{t_i(X)\overline{\#}_i s_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}) = \emptyset$, и поэтому

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)\#_i s_i(X)),$$

что доказывает u_ω-компактность алгебры $\mathcal{A}$. ◄

Из теоремы 4.8 следует, что классы q_ω- и u_ω-компактных алгебр языка $\mathcal{L}_{\neq}$ совпадают. Заметим, что в языках, не содержащих предикатного символа $\neq$, данное утверждение является неверным (см. примеры в [52, 130]).

Пример 4.9. В примере 4.7 было показано, что над алгебраической системой $\mathcal{Z}_{\neq}$ существует несовместная система $\mathbf{S}$, каждая конечная подсистема совместна. Таким образом, по теореме 4.8 $\mathcal{Z}_{\neq}$ не является q_ω-компактной алгебраической системой.

4.4 Координатные алгебры в языках с предикатом “не равно”

Следуя [23], понятие координатной алгебры в языке $\mathcal{L}_{\neq}$ определяется следующим образом. Пусть $Y \subseteq A^n$ — алгебраическое множество, определенное некоторой системой уравнений от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Обозначим через $\mathcal{T}(X)$ множество всех термов языка $\mathcal{L}_{\neq}$ от переменных X. На множестве $\mathcal{T}(X)$ можно определить отношение эквивалентности

$$t(X) \sim_Y s(X) \Leftrightarrow t(X) = s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y).$$

Класс эквивалентности терма $t(X)$ относительно $\sim_Y$ будем обозначать через $[t]_Y$. Тогда координатная $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\Gamma(Y)$ множества Y является фактор-алгеброй $\mathcal{T}(X)/\sim_Y$, и предикатный символ $\neq$ интерпретируется на $\Gamma(Y)$ как

$$[t]_Y \neq [s]_Y \Leftrightarrow t(X) \neq s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y).$$

Из определения предиката $\neq$ на $\Gamma(Y)$ следует, что для любого $[t]_Y \in \Gamma(Y)$ не выполнено $[t]_Y \neq [t]_Y$. Однако для различных элементов $[t]_Y, [s]_Y \in \Gamma(Y)$ выражение $[t]_Y \neq [s]_Y$ вполне может быть ложным. Иными словами, для некоторых элементов координатной $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебры $\Gamma(Y)$ оба предиката $=, \neq$ могут быть ложными. Однако, как следует из следующей теоремы, значения предикатов $=, \neq$ согласованы между собой на $\Gamma(Y)$ тогда и только тогда, когда множество Y неприводимо.

Теорема 4.10. *Пусть $\Gamma(Y)$ — координатная $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра некоторого алгебраического множества Y над $\mathcal{L}_{\neq}$-алгеброй $\mathcal{A}$. Алгебраическое множество Y неприводимо тогда и только тогда, когда в $\Gamma(Y)$ верна следующая универсальная формула*

$$\forall x \forall y((x = y) \leftrightarrow \neg((x \neq y))). \tag{92}$$

Доказательство. Заметим, что истинность формулы (92) на некоторой $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебре $\mathcal{B}$ равносильна согласованности предикатов $=, \neq$ на $\mathcal{B}$: для любой пары элементов b_1, b_2 из $\mathcal{B}$ истинно ровно одно из выражений $b_1 = b_2$, $b_1 \neq b_2$.

Докажем необходимость. Пусть $[t]_Y, [s]_Y$ — произвольная пара элементов координатной $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебры $\Gamma(Y)$. По теореме 4.2 ровно одно из уравнений $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$ принадлежит радикалу множества Y. Если $t(X) = s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$ и $t(X) \neq s(X) \notin \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$, то по определению предикатов $=, \neq$ в $\Gamma(Y)$ получаем, что выражение $([t]_Y = [s]_Y)$ истинно, а выражение $([t]_Y \neq [s]_Y)$ ложно. Если же

$t(X) = s(X) \notin \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$ и $t(X) \neq s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$, то получаем, что выражение $([t]_Y = [s]_Y)$ ложно, а выражение $([t]_Y \neq [s]_Y)$ истинно. Таким образом, для элементов $[t]_Y, [s]_Y$ ровно один из предикатов $=, \neq$ ложен, и поэтому формула (92) истинна в $\Gamma(Y)$.

Докажем достаточность. Пусть $t(X), s(X)$ — произвольная пара термов языка $\mathcal{L}_{\neq}$. Из истинности формулы (92) следует, что для элементов $[t]_Y, [s]_Y \in \Gamma(Y)$ истинен ровно один из предикатов $=, \neq$. Допустим, что $[t]_Y \neq [s]_Y$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Из определения координатной $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебры следует, что $t(X) \neq s(X) \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$. Поскольку выражение $([t]_Y = [s]_Y)$ ложно, то $t(X) = s(X) \notin \mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$. Таким образом, ровно одно из уравнений $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$ принадлежит радикалу $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)$, и по теореме 4.2 мы получаем, что множество Y неприводимо. ◀

5 Среднее число неприводимых компонент решения уравнения над линейно упорядоченными полугруппами

5.1 Предварительные сведения

Полурешетка называется *линейно упорядоченной*, если частичный порядок $\leq$, определенный в параграфе 0.1, линейный. С точностью до изоморфизма существует лишь одна линейно упорядоченная полурешетка $L_l = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ порядка l. Далее будем считать, что линейный порядок на полурешетке L_l определен как $a_1 < a_2 < \ldots < a_l$, то есть $a_i \cdot a_j = a_{\min(i,j)}$.

В данной главе мы будем рассматривать полурешетку L_l в языке $\mathcal{L}_s = \{\cdot\}$. Следовательно, термы будут иметь вид (12). Как обычно, равенство двух термов вида (12) будет называться уравнением. Отметим также, что ниже мы будем рассматривать неравенства термов $t(X) \leq s(X)$ в качестве уравнений, поскольку по определению частичного порядка в полурешетках мы имеем

$$t(X) \leq s(X) \Leftrightarrow t(X)s(X) = t(X).$$

Через $\mathrm{Var}(t)$ мы будем обозначать множество переменных, входящих в терм $t(X)$.

Ниже при подсчетах уравнений различных типов мы предполагаем, что выражения $t(X) = s(X)$ и $s(X) = t(X)$ считаются различными уравнениями. Пусть $Eq(n)$ — множество всех уравнений, которые содержат вхождения переменных из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, и каждое уравнение $t(X) = s(X) \in Eq(n)$ содержит вхождения *всех* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Уравнение $t(X) = s(X) \in Eq(n)$ называется (k_1, k_2)-*уравнением*, если $|\mathrm{Var}(t) \setminus \mathrm{Var}(s)| = k_1$ и $|\mathrm{Var}(s) \setminus \mathrm{Var}(t)| = k_2$. Например, уравнение $x_1x_2 = x_1x_3x_4$ является $(1,2)$-уравнением. Обозначим через $Eq(k_1, k_2, n) \subseteq Eq(n)$ множество всех (k_1, k_2)-уравнений множества $Eq(n)$. Ясно, что

$$Eq(n) = \bigcup_{(k_1,k_2) \in K_n} Eq(k_1, k_2, n), \tag{93}$$

где

$$K_n = \{(k_1, k_2) \mid k_1 + k_2 \leq n\} \setminus \{(0, n), (n, 0)\}.$$

Каждое уравнение $t(X) = s(X) \in Eq(k_1, k_2, n)$ однозначно определяется k_1 переменными в левой части, и k_2 другими переменными в правой части (оставшиеся

$n - k_1 - k_2$ переменных должны входить в обе части уравнения). Следовательно,

$$\#Eq(k_1, k_2, n) = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}.$$

Согласно (93) мы получаем

$$\#Eq(n) = 3^n - 2.$$

Замечание 5.1. *В диссертации мы рассматриваем лишь уравнения $t(X) = s(X)$ при $n > l$, то есть когда число переменных, входящих в $t(X) = s(X)$ строго больше порядка полурешетки L_l (случай $n \leq l$ требует принципиально другой техники вычислений).*

Из свойств линейно упорядоченных полурешеток непосредственно следует, что точка $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ является решением уравнения $t(X) = s(X)$ тогда и только тогда, когда существуют переменные $x_i \in \mathrm{Var}(t)$, $x_j \in \mathrm{Var}(s)$ такие, что $p_i = p_j$ и $p_i \leq p_k$ для всех $1 \leq k \leq n$.

Поскольку полурешетка L_l (как и любая конечная алгебраическая система) является нетеровой по уравнениям, то для L_l выполнена теорема 0.18: каждое алгебраическое множество над L_l единственным образом разлагается в объединение неприводимых компонент.

Предложение 5.2. *Алгебраическое множество Y является неприводимым над полурешеткой L_l тогда и только тогда, когда его координатная полугруппа $\Gamma(Y)$ вкладывается в L_l.*

Доказательство. Известно, что любая конечно порожденная полурешетка в языке $\mathcal{L}_s$ конечна. Следовательно, конечна и любая координатная полурешетка $\Gamma(Y)$.

Согласно Объединяющей теореме 0.24, полурешетка $\Gamma(Y)$ дискриминируется L_l тогда и только тогда, когда множество Y неприводимо. Однако для конечной полурешетки $\Gamma(Y)$ понятие дискриминируемости эквивалентно вложению. ◀

Над полурешеткой L_l существует изоморфные (но не равные) алгебраические множества. Например следующие два множества изоморфны

$$Y_1 = \mathrm{V}(\{x_1 \leq x_2 \leq x_3\}),\ Y_2 = \mathrm{V}(\{x_3 \leq x_2 \leq x_1\}),$$

так как

$$\Gamma(Y_1) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3 \rangle \cong L_3,$$

$$\Gamma(Y_2) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 \leq x_2 \leq x_1 \rangle \cong L_3.$$

5.2 Пример

Пусть $n = 3$, $l = 2$ (то есть мы рассматриваем уравнения от трех переменных над двухэлементной полурешеткой L_2). В данном случае имеем ровно $Eq(3) = 3^3 - 2 = 25$ различных уравнений. Указанная ниже таблица содержит информацию обо всех уравнениях от трех переменных над L_2. Второй столбец содержит информацию о неприводимых компонентах множества решений уравнения из первого столбца. Ячейка таблицы содержит символ $\uparrow$, если информация для данной ячейки аналогична информации из ячейки сверху.

С помощью таблицы можно непосредственно вычислить среднее число неприводимых компонент алгебраических множеств, определенных уравнениями от трех переменных:

$$\overline{\mathrm{Irr}}(3,2) = \frac{6 + 2(3+3+3+2+2+2+4+4+4+5+5+5)}{25} = \frac{90}{25} = 3.6 \qquad (94)$$

В параграфе 5 мы получим выражение для $\overline{\mathrm{Irr}}(n,l)$ (98). Ясно, что формула (98) даст ответ (94) для $n = 3$, $l = 2$ (см. вычисления в (99,100)).

Уравнения	Неприводимые компоненты (НК)	Число НК
$x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3$	$x_1 \le x_2 = x_3 \cup x_1 = x_2 \le x_3 \cup$ $x_2 \le x_1 = x_3 \cup x_3 \le x_1 = x_2 \cup$ $x_1 = x_3 \le x_2 \cup x_2 = x_3 \le x_1$	6
$x_1 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_1$	$x_1 \le x_2 = x_3 \cup x_1 = x_2 \le x_3 \cup$ $x_1 = x_3 \le x_2$	3
$x_2 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_2$	$\uparrow$	3
$x_3 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_3$	$\uparrow$	3
$x_1 = x_2x_3,$ $x_2x_3 = x_1$	$x_1 = x_2 \le x_3 \cup x_1 = x_3 \le x_2$	2
$x_2 = x_1x_3,$ $x_1x_3 = x_2$	$\uparrow$	2
$x_3 = x_1x_2,$ $x_1x_2 = x_3$	$\uparrow$	2
$x_1x_2 = x_1x_3,$ $x_1x_3 = x_1x_2$	$x_1 = x_2 \le x_3 \cup x_1 = x_3 \le x_2 \cup$ $x_1 \le x_2 = x_3 \cup x_2 = x_3 \le x_1$	4
$x_1x_2 = x_2x_3,$ $x_2x_3 = x_1x_2$	$\uparrow$	4
$x_1x_3 = x_2x_3,$ $x_2x_3 = x_1x_3$	$\uparrow$	4
$x_1x_2 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_1x_2$	$x_1 = x_2 \le x_3 \cup x_1 = x_3 \le x_2 \cup$ $x_1 \le x_2 = x_3 \cup x_2 = x_3 \le x_1 \cup$ $x_2 \le x_1 = x_3$	5
$x_1x_3 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_1x_3$	$\uparrow$	5
$x_2x_3 = x_1x_2x_3,$ $x_1x_2x_3 = x_2x_3$	$\uparrow$	5

5.3 Разложение алгебраических множеств на неприводимые компоненты

Пусть Y — это решение уравнения $t(X) = s(X)$ над полурешеткой $L_l = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Разбиение множества переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на непересекающиеся подмножества $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ называется X *упорядоченным*, если на σ определен линейный порядок $\leq_\sigma$: $X_1 \leq_\sigma X_2 \leq_\sigma \ldots \leq_\sigma X_l$. Через $\chi_\sigma(x_i)$ мы будем обозначать подмножество переменных X_k, которому принадлежит переменная x_i.

Мы будем писать $x_i =_\sigma x_j$ ($x_i \leq_\sigma x_j$), если $\chi(x_i) = \chi(x_j)$ ($\chi_\sigma(x_i) \leq_\sigma \chi_\sigma(x_j)$ соответственно).

Упорядоченное разбиение σ называется *Y-неприводимым*, если класс X_1 (минимальный элемент относительно порядка $\leq_\sigma$) содержит по крайней мере одну переменную из $t(X)$ и по крайней мере одну переменную из $s(X)$.

Например, уравнение $x_1x_2x_3 = x_1$ над полурешеткой L_2 имеет следующие $\mathrm{V}_{L_2}(x_1x_2x_3 = x_1)$-неприводимые разбиения: $(\{x_1\}, \{x_2, x_3\})$, $(\{x_1, x_2\}, \{x_3\})$, $(\{x_1, x_3\}, \{x_2\})$. Очевидно, что данные разбиения однозначно соответствуют неприводимым компонентам множества $\mathrm{V}(x_1x_2x_3 = x_1)$ (см. таблицу выше).

Каждое Y-неприводимое разбиение σ определяет алгебраическое множество Y_σ и систему $\mathbf{S}_\sigma$ следующим образом:

$$Y_\sigma = \mathrm{V}(\mathbf{S}_\sigma) = \mathrm{V}(\bigcup_{x_i =_\sigma x_j} \{x_i = x_j\} \bigcup_{x_i <_\sigma x_j} \{x_i \leq x_j\}).$$

Например, разбиение $\sigma = (\{x_2, x_3\}, \{x_1\})$ определяет следующую систему уравнений

$$\mathbf{S}_\sigma = \{x_2 = x_3, x_2 \leq x_1, x_3 \leq x_1\}.$$

для $Y = \mathrm{V}(\{x_1x_2 = x_1x_3\})$.

Лемма 5.3. *Множество Y_σ неприводимо для Y-неприводимого разбиения σ и, более того, $\Gamma(Y_\sigma) \cong L_l$.*

Доказательство. Согласно определению координатной полурешетки $\Gamma(Y_\sigma)$ порождается элементами $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и имеет следующие определяющие соотношения

$$\{x_i = x_j \mid \text{ если } x_i =_\sigma x_j\} \cup \{x_i \leq x_j \mid \text{ если } x_i \leq_\sigma x_j\}.$$

Ясно, что все элементы x_i линейно упорядочены в $\Gamma(Y_\sigma)$ и, таким образом, $\Gamma(Y_\sigma)$ является линейно упорядоченной полурешеткой. Так как множество переменных X

разбито ровно на l классов, то $\Gamma(Y_\sigma)$ изоморфна L_l. Согласно утверждению 5.2, множество Y_σ неприводимо. ◀

Следующая лемма дает разложение множества $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ с помощью упорядоченных разбиений.

Лемма 5.4. *Множество $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ является объединением множеств*

$$Y = \bigcup_{\sigma\ Y\text{-неприводимо}} Y_\sigma \tag{95}$$

Доказательство. Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in Y$. Определяя отношение эквивалентности $\sim_P$ как

$$x_i \sim_P x_j \Leftrightarrow p_i = p_j,$$

мы получаем семейство классов эквивалентности $\{X_1^P, X_2^P, \ldots, X_k^P\}$. Поскольку $p_i \in L_l$, то $k \leq l$. Полагаем $x_i \leq_P x_j$ если $p_i \leq p_j$. Порядок $\leq_P$ индуцирует линейный порядок на классах эквивалентности $\{X_i\}$. Зафиксируем пару переменных $x_t, x_s \in X_1^P$ (возможно, x_t и x_s — это одна и та же переменная) такую, что $x_t \in \mathrm{Var}(t)$ и $x_s \in \mathrm{Var}(s)$ (такая пара (x_t, x_s) всегда существует, поскольку P удовлетворяет уравнению $t(X) = s(X)$). Ниже будет найдено множество Y_σ такое, что $P \in Y_\sigma$. Рассмотрим следующую процедуру.

Процедура

ВХОД: разбиение $\sigma_0 = (X_1^P, X_2^P, \ldots, X_k^P)$, состоящее из k классов эквивалентности с определенным на нем линейным порядком $\leq_P$.

ВЫХОД: разбиение $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$, состоящее из l классов эквивалентности с определенным на нем линейным порядком $\leq_\sigma$.

Шаг 0: Полагаем $\sigma = \sigma_0$. Если $l = k$, то процедура заканчивает свою работу. В противном случае мы переходим на шаг 1.

Шаг j $(1 \leq j \leq l - k)$:

1. Рассмотрим произвольный класс эквивалентности $X_i \in \sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_{k+j-1})$ такой, что $|X_i| \geq 2$ и X_i содержит переменную $x \in X \setminus \{x_t, x_s\}$. Класс с требуемыми свойствами всегда существует, поскольку $n > l > k + j - 1$.

2. Переместим переменную x из класса X_i в новый класс X' и определим новый линейный порядок $\leq_\sigma$ как $X_i \leq_\sigma X' \leq X_{i+1}$. Полагаем $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_i, X', X_{i+1}, \ldots, X_{l+j-1})$ и переходим к следующему шагу процедуры.

Неформальный смысл процедуры состоит в следующем: мы увеличиваем число классов эквивалентности, сохраняя отношение $<_\sigma$.

После выполнения процедуры мы получаем упорядоченное разбиение σ, состоящее ровно из l классов эквивалентности X_i. Поскольку процедура не перемещает переменные x_t, x_s, то $x_t, x_s \in X_1$ и поэтому σ является Y-неприводимым разбиением.

Докажем, что $P \in Y_\sigma = \mathrm{V}(\mathbf{S}_\sigma)$. Уравнение $x_i \leq x_j \in \mathbf{S}_\sigma$ (аналогично можно рассмотреть равенство $x_i = x_j \in \mathbf{S}_\sigma$) не удовлетворяет точке P, если только $p_i > p_j$. Поскольку процедура сохраняет отношение строгого порядка $<_\sigma$, то мы получаем $x_j <_\sigma x_i$, и поэтому уравнение $x_i \leq x_j$ не может принадлежать системе $\mathbf{S}_\sigma$ — противоречие.

Докажем теперь, что для каждого σ выполнено $Y_\sigma \subseteq Y$. Рассмотрим точку $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in Y_\sigma$. Поскольку $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ является Y-неприводимым разбиением, то класс X_1 содержит переменные $x_t \in \mathrm{Var}(t)$, $x_s \in \mathrm{Var}(s)$ и, кроме того, $p_t = p_s$. Так как X_1 является минимальным классом относительно порядка $\leq_\sigma$, то

$$x_t \leq x_i \in \mathbf{S}_\sigma,\ x_s \leq x_i \in \mathbf{S}_\sigma \text{ для любого } i \in [1, n] \setminus \{t, s\}.$$

Таким образом, $p_t = p_s \leq p_i$ для любого $1 \leq i \leq n$, и мы получаем

$$t(P) = p_t = p_s = s(P) \Rightarrow P \in \mathrm{V}(t(X) = s(X)) = Y.$$

◀

Пусть $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ является Y-неприводимым разбиением множества переменных X. Определим точку $P_\sigma = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in L_l^n$ следующим образом

$$p_i = a_k \text{ если } x_i \in X_k.$$

Лемма 5.5. *Точка P_σ принадлежит множеству Y_σ, но $P_\sigma \notin Y_{\sigma'}$ для каждого Y-неприводимого разбиения $\sigma' \neq \sigma$. Таким образом, в объединении (95) выполнено $Y_{\sigma_1} \nsubseteq Y_{\sigma_2}$ для различных σ_1, σ_2.*

Доказательство. Прямая проверка дает $P_\sigma \in \mathrm{V}(\mathbf{S}_\sigma) = Y_\sigma$.

Рассмотрим Y-неприводимое разбиение

$$\sigma' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_l) \neq \sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l).$$

Существуют переменные x_i, x_j такие, что $x_i <_\sigma x_j$, но $x_i \geq_{\sigma'} x_j$. Для точки P_σ мы имеем $p_i < p_j$, следовательно, P_σ не удовлетворяет уравнению $x_i \geq x_j \in \mathbf{S}_{\sigma'}$, и поэтому $P_\sigma \notin Y_{\sigma'}$. ◀

Из лемм 5.3, 5.4, 5.5 следует, что множества Y_σ в разложении (95) являются неприводимыми компонентами множества Y. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 5.6. *Число Y-неприводимых разбиений алгебраического множества $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ равно числу неприводимых компонент множества Y.*

Следующее утверждение содержит информацию о свойствах объединения (95).

Теорема 5.7. *Пусть (95) является объединением неприводимых компонент алгебраического множества $Y = \mathrm{V}(t(X) = s(X))$ над полурешеткой L_l. Тогда*

1. *точка P принадлежит всем множествам Y_σ тогда и только тогда, когда $P = (a, a, \ldots, a)$ для некоторого $a \in L_l$;*

2. $$Y_\sigma \setminus \bigcup_{\sigma' \neq \sigma} Y_{\sigma'} = \{P_\sigma\}$$

   (это означает, что разложение (95) избыточно, то есть каждая точка множества $Y \setminus \bigcup_\sigma \{P_\sigma\}$ принадлежит по крайней мере двум неприводимым компонентам);

3. *все неприводимые компоненты множества Y изоморфны друг другу;*

4. *$|Y_\sigma| = \binom{2l-1}{l}$ для произвольного σ.*

Доказательство.

1. Ясно, что точка $P = (a, a, \ldots, a)$ удовлетворяет всем системам $\mathbf{S}_\sigma$, и поэтому $P \in \bigcup_\sigma Y_\sigma$.

   Рассмотрим точку $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ такую, что $q_i < q_j$. Очевидно, что точка Q не удовлетворяет множеству Y_σ, где $x_i \geq_\sigma x_j$. Таким образом, $Q \notin \bigcap_\sigma Y_\sigma$.

2. В лемме 5.5 было доказано, что $P_\sigma \in Y_\sigma$. Легко видеть, что только точка P_σ делает все неравенства $\leq$ системы $\mathbf{S}_\sigma$ строгими. Таким образом, для произвольной точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in Y_\sigma \setminus \{P_\sigma\}$ существует уравнение $x_i \leq x_j \in \mathbf{S}_\sigma$ такое, что $p_i = p_j$. Ниже будет найдено Y-неприводимое разбиение σ' со свойством $P \in Y_{\sigma'}$.

   Пусть $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$, $x_i \in X_{i'}$, и без ограничения общности можно считать, что $x_j \in X_{i'+1}$. Если $i' \neq 1$, то мы полагаем $\sigma' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_l)$, где

$$X'_k = \begin{cases} X_k, \text{ если } k \neq i',\, k \neq i'+1, \\ (X_{i'+1} \setminus \{x_j\}) \cup \{x_i\}, \text{ если } k = i'+1, \\ (X_{i'} \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}, \text{ если } k = i' \end{cases} \tag{96}$$

   Поскольку $X'_1 = X_1$, то σ' является Y-неприводимым разбиением. Система $\mathbf{S}_{\sigma'}$ содержит уравнение $x_j \leq x_i$ вместо $x_i \leq x_j \in \mathbf{S}_\sigma$. Так как остальные уравнения систем $\mathbf{S}_{\sigma'}, \mathbf{S}_\sigma$ одинаковы, то $P \in \mathrm{V}(\mathbf{S}_{\sigma'}) = Y_{\sigma'}$.

   Предположим теперь, что $i' = 1$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $x_i \in \mathrm{Var}(t)$. Согласно определению Y-неприводимого разбиения существует переменная $x_k \in X_1 \cap \mathrm{Var}(s)$. Если $x_j \in \mathrm{Var}(t)$ мы определяем σ' по формуле (96). В этом случае класс X'_1 содержит переменные $x_j \in \mathrm{Var}(t)$, $x_k \in \mathrm{Var}(s)$, и поэтому σ' является Y-неприводимым разбиением $P \in Y_{\sigma'}$. В противном случае ($x_j \in \mathrm{Var}(s)$), мы берем переменную x_k вместо x_i и повторяем все рассуждения выше.

3. Данное утверждение непосредственно следует из леммы 5.3.

4. Для разбиения $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ число $|Y_\sigma|$, очевидно, равно числу последовательностей $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_l$ таких, что $X_i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Согласно формулам комбинаторики, число таких монотонных последовательностей равно $\binom{2l-1}{l}$.

◄

5.4 Среднее число неприводимых компонент

Пусть $\left\{{n \atop m}\right\}$ — число Стирлинга второго рода. Согласно определению, $\left\{{n \atop m}\right\}$ равно числу всевозможных разбиений множества из n элементов на m непустых непомеченных подмножеств. Число $\left\{{n \atop m}\right\}^* = m!\left\{{n \atop m}\right\}$, очевидно, равно числу всевозможных разбиений множества из n элементов на m *помеченных* непустых множеств. Таким образом, существует ровно $\left\{{n \atop l}\right\}^*$ упорядоченных разбиений $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ множества переменных X ($|X| = n$) на l упорядоченных классов эквивалентностей. *Упорядоченное разбиение* $\sigma = (X_1, X_2, \ldots, X_l)$ *не является* Y*-неприводимым, если* $X_1 \subseteq \mathrm{Var}(t) \setminus \mathrm{Var}(s)$ *либо* $X_1 \subseteq \mathrm{Var}(s) \setminus \mathrm{Var}(t)$ Для произвольного (k_1, k_2)-уравнения $t(X) = s(X)$ существует ровно

$$\sum_{i=1}^{k_1} \binom{k_1}{i} \left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*$$

упорядоченных разбиений σ с $X_1 \subseteq \mathrm{Var}(t) \setminus \mathrm{Var}(s)$. Аналогично, существует ровно

$$\sum_{i=1}^{k_2} \binom{k_2}{i} \left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*$$

упорядоченных разбиений σ со свойством $X_1 \subseteq \mathrm{Var}(s) \setminus \mathrm{Var}(t)$.

По теореме 5.6 для (k_1, k_2)-уравнения $t(X) = s(X)$ число неприводимых компонент (Y-неприводимых разбиений) равно

$$\mathrm{Irr}(k_1, k_2, n, l) = \left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{i=1}^{k_1} \binom{k_1}{i} \left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* - \sum_{i=1}^{k_2} \binom{k_2}{i} \left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*. \quad (97)$$

Тогда среднее число неприводимых компонент алгебраических множеств, определяемых уравнениями из $Eq(n)$, равно

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n, l) = \frac{\sum_{(k_1,k_2)\in K_n} \#Eq(k_1, k_2, n)\mathrm{Irr}(k_1, k_2, n, l)}{\#Eq(n)} =$$
$$\frac{\sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \#Eq(k_1, k_2, n)\mathrm{Irr}(k_1, k_2, n, l) - \#Eq(0, n, n)\mathrm{Irr}(0, n, n, l)}{\#Eq(n)}$$

Ниже мы вычислим величину $\overline{\mathrm{Irr}}$ используя следующие обозначения:

1. символ $A \overset{(1)}{=} B$ обозначает, что выражение B было получено из A с помощью бинома Ньютона
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

2. символ $A \stackrel{(2)}{=} B$ обозначает, что выражение B было получено из A с помощью следующего тождества биномиальных коэффициентов
$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}.$$

3. символ $A \stackrel{(3)}{=} B$ обозначает, что выражение B было получено из A с помощью рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга
$$\left\{{a+1 \atop b}\right\} = b\left\{{a \atop b}\right\} + \left\{{a \atop b-1}\right\}.$$

4. символ $A \stackrel{(4)}{=} B$ обозначает, что выражение B было получено из A с помощью следующего тождества чисел Стирлинга
$$\left\{{a+1 \atop b+1}\right\} = \sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}\left\{{i \atop b}\right\}.$$

   Замети, что в последней формуле можно заменить пределы суммирования на $\sum_{i=c}^{a}$ (где $c < b$), поскольку $\left\{{c \atop b}\right\} = 0$ для $c < b$.

Имеем
$$\#Eq(0,n,n)\mathrm{Irr}(0,n,n,l) = \binom{n}{0}\binom{n}{n}\left(\left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\right) =$$
$$\left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{n-i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* = \left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left\{{j \atop l-1}\right\}^* = \left\{{n \atop l}\right\}^* - (l-1)!\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left\{{j \atop l-1}\right\} \stackrel{(4)}{=}$$
$$\left\{{n \atop l}\right\}^* - (l-1)!\left(\left\{{n+1 \atop l}\right\} - \left\{{n \atop l-1}\right\}\right) \stackrel{(3)}{=} \left\{{n \atop l}\right\}^* - (l-1)!l\left\{{n \atop l}\right\} = 0,$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\#Eq(k_1,k_2,n)\mathrm{Irr}(k_1,k_2,n) =$$
$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\left(\left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{i=1}^{k_1}\binom{k_1}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* - \sum_{i=1}^{k_2}\binom{k_2}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\right) =$$
$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\left\{{n \atop l}\right\}^* - \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\sum_{i=1}^{k_1}\binom{k_1}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* -$$
$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\sum_{i=1}^{k_2}\binom{k_2}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* = S_1 - S_2 - S_3,$$

где
$$S_1 = \left\{{n \atop l}\right\}^*\sum_{k_1=0}^{n-1}\binom{n}{k_1}2^{n-k_1} \stackrel{(1)}{=} \left\{{n \atop l}\right\}^*(3^n - 1),$$

$$S_2 \overset{(2)}{=} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k_1}\binom{n}{k_1}\binom{k_1}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n-k_1}{k_2} \overset{(1)}{=}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k_1}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k_1-i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 2^{n-k_1} = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\sum_{k_1=i}^{n-1}\binom{n-i}{k_1-i}2^{n-k_1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\sum_{j=0}^{n-i-1}\binom{n-i}{j}2^{n-i-j} = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\left(\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{n-i-j}2^{n-i-j}-1\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\left(3^{n-i}-1\right).$$

Вычисляя

$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* = (l-1)!\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\left\{{j \atop l-1}\right\} \overset{(4)}{=} (l-1)!\left(\left\{{n+1 \atop l}\right\}-\left\{{n \atop l-1}\right\}\right) \overset{(3)}{=}$$

$$(l-1)!\,l\left\{{n \atop l}\right\} = \left\{{n \atop l}\right\}^*,$$

мы получаем

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 3^{n-i} - \left\{{n \atop l}\right\}^* = S(n,l) - \left\{{n \atop l}\right\}^*,$$

где

$$S(n,l) = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 3^{n-i}.$$

Находим

$$S_3 = \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k_1}\sum_{k_2=i}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{i}\binom{n-k_1-i}{k_2-i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* =$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^*\sum_{k_2=i}^{n-k_1}\binom{n-k_1-i}{k_2-i} \overset{(1)}{=} \sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 2^{n-k_1-i} \overset{(2)}{=}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k_1}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k_1-i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 2^{n-k_1-i} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 2^{n-i}\sum_{k_1=0}^{n-i}\binom{n-i}{k_1}2^{-k_1} \overset{(1)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 2^{n-i}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left\{{n-i \atop l-1}\right\}^* 3^{n-i} = S(n,l)+\binom{n}{n}\left\{{n-n \atop l-1}\right\}^* = S(n,l).$$

Окончательно получаем

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,l) = \frac{S_1-S_2-S_3-0}{3^n-2} = \frac{\left\{{n \atop l}\right\}^*(3^n-1)-(S(n,l)-\left\{{n \atop l}\right\}^*)-S(n,l)}{3^n-2} =$$

$$\frac{3^n\left\{{n \atop l}\right\}^*-2S(n,l)}{3^n-2}. \quad (98)$$

В частности, мы получаем точное выражение для $\overline{\mathrm{Irr}}(n,2)$, используя следующие тождества для чисел Стирлинга

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \ \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Имеем

$$S(n,2) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 1 \cdot 3^{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} 3^{n-i} \overset{(1)}{=} 4^n - 3^n - 1,$$

следовательно,

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,2) = \frac{3^n \cdot 2(2^{n-1}-1) - 2(4^n - 3^n - 1)}{3^n - 2} = \frac{6^n - 2 \cdot 4^n + 2}{3^n - 2}. \tag{99}$$

В частности, значение $n = 3$ дает

$$\overline{\mathrm{Irr}}(3,2) = \frac{6^3 - 2 \cdot 4^3 + 2}{3^3 - 2} = \frac{90}{25} = 3.6, \tag{100}$$

что совпадает с ответом, полученным в (94).

Следующее утверждение содержит верхнюю и нижнюю оценку для $\overline{\mathrm{Irr}}(n,l)$.

Предложение 5.8. *Число $\overline{\mathrm{Irr}}(n,l)$ удовлетворяет двойному неравенству*

$$\frac{1}{3} \left\{ {n \atop l} \right\}^* \leq \overline{\mathrm{Irr}}(n,l) \leq \left\{ {n \atop l} \right\}^*$$

Доказательство.

Величину $S(n,l)$ можно оценить следующим образом

$$S(n,l) \leq 3^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop l-1} \right\}^* \overset{(4)}{=} 3^{n-1}(l-1)! \left(\left\{ {n+1 \atop l} \right\} - \left\{ {n \atop l-1} \right\} \right) \overset{(3)}{=}$$
$$3^{n-1}(l-1)! l \left\{ {n \atop l} \right\} = 3^{n-1} \left\{ {n \atop l} \right\}^*,$$

и аналогично получаем

$$S(n,l) \geq 3 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop l-1} \right\}^* = 3 \left\{ {n \atop l} \right\}^*.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,l) \leq \frac{3^n \left\{ {n \atop l} \right\}^* - 2 \cdot 3 \left\{ {n \atop l} \right\}^*}{3^n - 2} = \left\{ {n \atop l} \right\}^* \frac{3^n - 6}{3^n - 2} \leq \left\{ {n \atop l} \right\}^*,$$

и

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,l) \geq \frac{3^n \left\{ {n \atop l} \right\}^* - 2 \cdot 3^{n-1} \left\{ {n \atop l} \right\}^*}{3^n - 2} = \left\{ {n \atop l} \right\}^* \frac{3^n - 2 \cdot 3^{n-1}}{3^n - 2} \geq \left\{ {n \atop l} \right\}^* \frac{3^n - 2 \cdot 3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left\{ {n \atop l} \right\}^*.$$

◀

Предложение 5.9. *При фиксированном l и $n \to \infty$ справедлива эквивалентность*

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,l) \sim l^n.$$

Доказательство. Используя следующую явную формулу для вычисления чисел Стирлинга,

$$\left\{ {n \atop l} \right\} = \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} j^n,$$

мы получаем, что $\left\{ {n \atop l} \right\} \sim l^n$ при фиксированном l и $n \to \infty$. Используя утверждение 5.8, мы получаем

$$\overline{\mathrm{Irr}}(n,l) \sim \left\{ {n \atop l} \right\}^* = l! \left\{ {n \atop l} \right\} \sim l! l^n \sim l^n.$$

◀

6 Эквивалентные уравнения над полурешетками

Предполагается, что все рассматриваемые в данной главе полурешетки конечны и содержат максимальный элемент 1 (единицу). Данное предположение не является искусственным (так как к любой полурешетке можно внешним образом добавить единичный элемент) и дополнительно обосновывается в замечании 6.1. Минимальный элемент полурешетки обозначается через 0, операция умножения (взятия точной нижней грани) обозначается символом $\cdot$. Несравнимые элементы $a, b \in S$ будем обозначать через $a \parallel b$. Элемент a полурешетки S называется *неразложимым*, если не существуют элементов $b > a$, $c > a$ таких, что $a = bc$.

Ниже любая полурешетка S будет рассматриваться в языке $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$. Для простоты расчетов мы немного модфицируем общее определение уравнения в языке $\mathcal{L}_s(S)$: *уравнением над* S называется упорядоченная пара вида $(t(X)s_1, s(X)s_2)$ или $(t(X)s_1, s_2)$, где $t(X), s(X)$ — непустые произведения букв из множества X, $s_i \in S$. Уравнение над S далее будем записывать в традиционной форме с помощью знака $=$: $t(X)s_1 = s(X)s_2$, $t(X)s_1 = s_2$.

Замечание 6.1. *Определение уравнения как упорядоченной пары связано с тем, что далее в работе выражения $t(X)s_1 = s(X)s_2$ и $s(X)s_2 = t(X)s_1$ считаются разными уравнениями. Благодаря данному предположению можно корректно говорить о правой и левой части уравнения. Заметим, также, что выражение $s_1 = t(X)s_2$ согласно формальному определению уравнением не является.*

Поскольку $1 \in S$, то выражения вида $t(X)s_1 = s(X)$, $t(X) = s(X)s_2$, $t(X) = s(X)$, $t(X) = s_2$ также являются уравнениями над S.

Отметим, что другие варианты определения множества уравнений над полурешеткой S обсуждается в замечании 6.11.

Уравнение вида $t(X)s_1 = s(X)s_2$ ($t(X)s_1 = s_2$) будем называть *уравнением первого (второго) рода*. Заметим, что все уравнения первого рода совместны, поскольку точка $(0, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет любому такому уравнению.

Обозначим через Eq^i_m множество всех уравнений i-го рода над полурешеткой S, зависящих от не более чем m переменных. Обозначим $\mathrm{Eq}_m = \mathrm{Eq}^1_m \cup \mathrm{Eq}^2_m$ — множество всех уравнений от не более чем m переменных. Пусть порядок полурешетки S равен n. Поскольку произвольное уравнение из множества Eq^1_m имеет вид $t(X)s_1 = s(X)s_2$

(где $t(X), s(X)$ — непустые произведения переменных), то существует ровно $(2^m - 1)^2 n^2$ уравнений первого рода. Аналогично можно показать, что $|\mathrm{Eq}_m^2| = (2^m - 1)n^2$. Таким образом,

$$|\mathrm{Eq}_m| = (2^m - 1)^2 n^2 + (2^m - 1)n^2 = 2^m n^2 (2^m - 1).$$

Множество уравнений над полурешеткой S с решением $Y \subseteq S^m$ мы обозначаем ниже через $\mathrm{Eq}_m(Y) \subseteq \mathrm{Eq}_m$.

6.1 Две серии полурешеток

Полученные в данном параграфе результаты будут использованы при доказательстве основных теорем параграфа 6.2.

Пусть L_n — линейно упорядоченная полурешетка, состоящая из n ($n \geq 2$) элементов $0 < 1 < 2 < \ldots < n-1$ (для удобства элементы полурешетки L_n обозначены натуральными числами, единицей полурешетки является элемент $n-1$).

Лемма 6.2. *Для полурешетки L_n имеем равенство:*

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m - 1)\frac{n(n-1)}{2}.$$

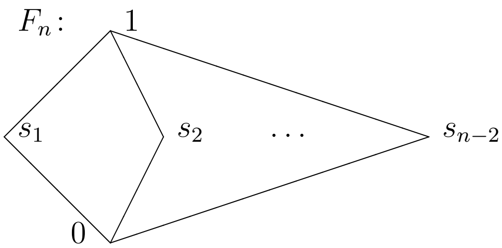
Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно над L_n, то найдем количество уравнений второго рода несовместных над L_n. Очевидно что уравнение $t(X)c = d$ несовместно над L_n тогда и только тогда, когда $c < d$. Общее количество пар $\{(c,d) \mid c < d\}$ равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Поскольку существует ровно $2^m - 1$ непустых произведений $t(X)$ от не более чем m переменных, то общее число несовместных уравнений над L_n равно $(2^m-1)\frac{n(n-1)}{2}$.
◀

Сведения об уравнениях от одной переменной над полурешеткой L_n и их решениях приведены в следующей таблице (ниже через $[a,b]$ обозначено множество $\{x \mid a \leq x \leq b\} \subseteq L_n$).

Множество $Y \subseteq L_n$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
L_n	$\{xa = xa \mid a \in L_n\} \cup$ $\{x0 = 0\}$	$n+1$
$[0,k]$ $(0 < k < n-1)$	$\{xk = xa \mid a > k\} \cup$ $\{xa = xk \mid a > k\}$	$2(n-k)$
$[k,n]$ $(k > 0)$	$xk = k$	1
k $(0 < k < n-1)$	$\{xa = k \mid a > k\}$	$n-k$
0	$\{x0 = xa \mid a \neq 0\} \cup$ $\{xa = x0 \mid a \neq 0\} \cup$ $\{xa = 0 \mid a \neq 0\}$	$3(n-1)$
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a < b\}$	$n(n-1)/2$

Пусть F_n — веерная полурешетка, состоящая из n ($n \geq 2$) элементов $0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, 1$, где множество элементов $s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}$ образуют антицепь, которую мы будем обозначать через A_n.



Ясно, что при $n = 2, 3$ полурешетки F_n, L_n изоморфны друг другу.

Лемма 6.3. *Для полурешетки F_n имеем равенство:*

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m - 1)(n^2 - 3n + 3).$$

Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно над F_n, то найдем количество уравнений второго рода несовместных над F_n. Очевидно что уравнение $t(X)c = d$ совместно над F_n тогда и только тогда, когда пара (c, d) принадлежит множеству

$$\{(c, 0) \mid c \in F_n\} \cup \{(s_i, s_i) \mid 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{(1, s_i) \mid 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{(1, 1)\}$$

Пользуясь тем, что указанные выше четыре множества попарно не пересекаются, находим общее количество пар (c, d), при которых уравнение $t(X)c = d$ совместно:

$$n + (n-2) + (n-2) + 1 = 3(n-1).$$

Поскольку существует $2^m - 1$ непустых произведений $t(X)$ от не более чем m переменных, то общее число совместных уравнений второго рода над F_n равно $3(2^m - 1)(n-1)$. Соответственно число несовместных уравнений от не более чем m переменных над полурешеткой F_n равно:

$$(2^m - 1)n^2 - 3(2^m - 1)(n-1) = (2^m - 1)(n^2 - 3n + 3).$$

◀

Сведения об уравнениях от одной переменной и их решениях над F_n ($n \geq 6$) приведены в следующей таблице.

Множество $Y \subseteq F_n$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
F_n	$\{xa = xa \mid a \in F_n\} \cup \{x0 = 0\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	$n + 1$
$A_n \setminus \{a\}$ $(a \in A_n)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
$A_n \setminus \{a, b\}$ $(a, b \in A_n,\ a \neq b)$	$xa = xb, xb = xa$	2
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0, x1 = x0, x0 = x1$	3
$\{0, a\}$ $(a \in A_n)$	$x1 = xa, xa = x1$	2
$\{a, 1\}$ $(a \in A_n)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \ngeq b\}$	$n^2 - 3n + 3$

Для полурешеток F_4, F_5 имеем следующие таблицы.

Множество $Y \subseteq F_4$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
F_4	$\{xa = xa \mid a \in F_4\} \cup \{x0 = 0\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	5
$A_4 \setminus \{a\}$ $(a \in A_4)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0,\ x1 = x0,\ x0 = x1,$ $xs_1 = xs_2,\ xs_2 = xs_1$	5
$\{0, a\}$ $(a \in A_4)$	$x1 = xa, xa = x1$	2
$\{a, 1\}$ $(a \in A_4)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \ngeq b\}$	7

Множество $Y \subseteq F_5$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
F_5	$\{xa = xa \mid a \in F_5\} \cup \{x0 = 0\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	6
$A_5 \setminus \{a\}$ $(a \in A_5)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0$, $x1 = x0$, $x0 = x1$	3
$\{0, a\}$ $(a \in A_5)$	$x1 = xa, xa = x1$ $xb = xc$, $xc = xb$ $(b, c \in A_5 \setminus \{a\})$	4
$\{a, 1\}$ $(a \in A_5)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \not\geq b\}$	13

6.2 Основные результаты

Теорема 6.4. *Для произвольной полурешетки S, состоящей из n элементов, выполнено*

$$(2^m-1)\frac{n(n-1)}{2} \le |\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| \le (2^m-1)(n^2-3n+3). \tag{101}$$

Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно, то далее будем рассматривать лишь уравнения второго рода. Множество Eq^2_m можно представить в виде дизъюнктного объединения трех множеств уравнений:

$$\mathrm{Eq}^2_m = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{t(X)c = d | c \ge d\} \cup \{t(X)c = d | c < d\} \cup \{t(X)c = d | c \parallel d\}.$$

Все уравнения из множества M_1 совместны (все они удовлетворяют точке $(d, d, \ldots, d)$). С другой стороны, все уравнения из множеств M_2, M_3 несовместны и поэтому $\mathrm{Eq}_m(\emptyset) = M_2 \cup M_3$. Поскольку $|\mathrm{Eq}^2_m| = (2^m-1)n^2$, то

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m-1)n^2 - |M_1|.$$

Величина $|M_1|$ равна количеству пар сравнимых элементов полурешетки S и в классе всех полурешеток порядка n величина $|M_1|$ достигает минимума (максимума) на полурешетке F_n (L_n). Следовательно, величина $|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|$ принимает минимальное (максимальное) значения на полурешетке L_n (F_n), и с помощью лемм 6.2, 6.3 мы получаем требуемое неравенство. ◀

Теорема 6.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что для любой полурешетки порядка $n > N$ выполнено*

$$\frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon \le \frac{\mathrm{Eq}_m(\emptyset)}{\mathrm{Eq}_m} \le \frac{1}{2^m}. \tag{102}$$

Доказательство. Разделив все части двойного неравенства (101) на $|\mathrm{Eq}_m| = 2^m n^2(2^m-1)$ получим

$$\frac{(2^m-1)n(n-1)}{2\cdot 2^m n^2(2^m-1)} \le \frac{|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|}{|\mathrm{Eq}_m|} \le \frac{(2^m-1)(n^2-3n+3)}{2^m n^2(2^m-1)},$$

$$\frac{1}{2^{m+1}}\left(1-\frac{1}{n}\right) \le \frac{|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|}{|\mathrm{Eq}_m|} \le \frac{1}{2^m}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right) \le \frac{1}{2^m}.$$

Поскольку выражение $1 - \frac{1}{n}$ стремится к 1 при $n \to \infty$, то начиная с некоторого натурального числа N будет выполнятся неравенство (102). ◄

Для некоторых подмножеств $A \subseteq S$ значение величины $|\mathrm{Eq}_1(A)|$ можно вычислить точно для любой полурешетки S.

Теорема 6.6. *Пусть S — произвольная полурешетка порядка n. Тогда верны следующие утверждения.*

1. $|\mathrm{Eq}_1(S)| = n + 1$.

2. *Пусть $a \in S \setminus \{0\}$, тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{x \mid x \geq a\})| = 1$. В частности, $|\mathrm{Eq}_1(\{1\})| = 1$*

3. *Пусть $a \in S \setminus \{0, 1\}$ — неразложимый элемент. Тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{a\})| = |\{x \mid x > a\}|$.*

4. *Пусть 0 является неразложимым элементом полурешетки S (то есть в S ровно один атом). Тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{0\})| = 3(n - 1)$.*

Доказательство.

1. Допустим, что $\mathrm{V}_S(xc = d) = S$. Тогда

$$0 \in \mathrm{V}_S(xc = d) \Rightarrow d = 0, \; c \in \mathrm{V}_S(xc = 0) \Rightarrow c = 0.$$

   Следовательно, единственным уравнением второго рода с решением S является $x0 = 0$.

   Пусть теперь уравнение $xa = xb$ имеет решение S. Тогда

$$a \in \mathrm{V}_S(xa = xb) \Rightarrow a = ab, \; b \in \mathrm{V}_S(xa = xb) \Rightarrow ab = b,$$

   и поэтому $a = b$. Таким образом, имеем ровно n уравнений первого рода с решением S. Следовательно (учитывая и уравнение $x0 = 0$), $|\mathrm{Eq}_1(S)| = n + 1$.

2. Обозначим множество $\{x \mid x \geq a\}$ через Y. Ясно, что никакое уравнение вида $xb = xc$ не может иметь решение Y, так как $0 \in \mathrm{V}_S(xa = xb) \setminus Y$. Допустим, что $\mathrm{V}_S(xc = d) = Y$ для некоторых $c, d \in Y$. Имеем

$$a \in Y \Rightarrow ac = d \Rightarrow d \leq c \Rightarrow dc = d \Rightarrow d \in \mathrm{V}_S(xc = d) \Rightarrow d \in Y \Rightarrow d \geq a,$$

   однако равенство $ac = d$ влечет $d \leq a$. Следовательно, $d = a$, но тогда

$$a \in Y \Rightarrow ac = a \Rightarrow c \geq a \Rightarrow c \in Y \Rightarrow c \in \mathrm{V}_S(xc = a) \Rightarrow cc = a \Rightarrow c = a.$$

Таким образом, мы получаем, что уравнение $xa = a$ является единственным уравнением во множестве Eq_1 с решением Y, и поэтому $|\mathrm{Eq}_1(Y)| = 1$.

3. Ясно, что множество $\mathrm{Eq}_1(\{a\})$ не содержит уравнений первого рода, поскольку каждое уравнение первого рода удовлетворяет точке 0. Рассмотрим уравнение второго рода $xb = c$ с решением $\{a\}$. Равенство $ab = c$ влечет $c \leq b$ и, следовательно, $c \in \mathrm{V}_S(xb = c)$. Поскольку $\mathrm{V}_S(xb = c) = \{a\}$, то $c = a$.

   Покажем, что для любого $b > a$ уравнение $xb = a$ имеет решение $\{a\}$. Если существует отличный от a элемент $c \in \mathrm{V}_S(xb = a)$, то получаем $cb = a$, что противоречит неразложимости элемента a

   Таким образом, $\mathrm{Eq}_1(\{a\}) = \{xb = a \mid b > a\}$ и поэтому $|\mathrm{Eq}_1(\{a\})| = |\{b \mid b > a\}|$.

4. Обозначим единственный атом полурешетки S через a. Допустим, что уравнение первого рода $xb = xc$ ($b, c \neq 0$) имеет решение $\{0\}$. Поскольку $b, c \geq a$, то $ab = ac = a$ и поэтому $a \in \mathrm{V}_S(xb = xc)$ — противоречие.

   Используя рассуждения из предыдущего пункта, мы получаем, что $\mathrm{V}_S(xb = 0) = \{0\}$ для всех $b \neq 0$ и других уравнений второго рода с решением $\{0\}$ нет. Таким образом,

$$\mathrm{Eq}_1(\{0\}) = \{xb = 0 \mid b > 0\} \cup \{x0 = xb \mid b > 0\} \cup \{xb = x0 \mid b > 0\},$$

   и поэтому

$$|\mathrm{Eq}_1(\{0\})| = |\{xb = 0 \mid b > 0\}| + |\{x0 = xb \mid b > 0\}| + |\{xb = x0 \mid b > 0\}| = 3(n-1).$$

◄

Теорема 6.7. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$, и $Y \subseteq S$ — непустое алгебраическое множество над S. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|.$$

Доказательство теоремы 6.7 будет следовать из приведенных ниже лемм.

Лемма 6.8. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$, и $Y \subseteq S$ — непустое алгебраическое множество над S, $Y \neq \{0\}$. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|. \tag{103}$$

Доказательство. Множество $\mathrm{Eq}_1(Y)$ допускает представление в виде объединения $\mathrm{Eq}_1(Y) = \mathrm{Eq}_1^1(Y) \cup \mathrm{Eq}_1^2(Y)$, где $\mathrm{Eq}_1^i(Y)$ — множество уравнений i-го рода с решением Y. Множество $\mathrm{Eq}_1^1(Y)$ в свою очередь есть объединение

$$\mathrm{Eq}_1^1(Y) = \mathrm{Eq}_{\|}(Y) \cup \mathrm{Eq}_{+}(Y) \cup \mathrm{Eq}_{-}(Y) \cup \mathrm{Eq}_{=}(Y),$$

где $\mathrm{Eq}_{\|}(Y), \mathrm{Eq}_{+}(Y), \mathrm{Eq}_{-}(Y), \mathrm{Eq}_{=}(Y)$ — суть следующие подмножества в $\mathrm{Eq}_1^1(Y)$:

$$\mathrm{Eq}_{\|}(Y) = \{xa = xb \mid a \parallel b\},$$

$$\mathrm{Eq}_{+}(Y) = \{xa = xb \mid a < b\},\ \mathrm{Eq}_{-}^1(Y) = \{xa = xb \mid a > b\},$$

$$\mathrm{Eq}_{=}(Y) = \{\text{уравнения с одинаковой левой и правой частью}\}.$$

Поскольку все уравнения

$$x0 = a\ (a \neq 0), xa = 1\ (a \neq 1)$$

несовместны над S, то получаем следующую оценку снизу на мощность множества $\mathrm{Eq}_1(\emptyset)$:

$$2(n-1) \leq |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|. \tag{104}$$

Рассмотрим вначале простейшие случаи.

1. Пусть $Y = S$ (то есть каждое уравнение из $\mathrm{Eq}_1(Y)$ удовлетворяет всем элементам полурешетки S). По теореме 6.6, $|\mathrm{Eq}_1(Y)| = n + 1$. Ясно, что при условии $n \geq 6$ мы имеем неравенство

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = n + 1 < 2(n-1) \leq |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|,$$

и получаем (103).

2. Допустим, что множество Y не содержит точку 0. В этом случае $\mathrm{Eq}_1^1(Y) = \emptyset$, а множество $\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ не содержит уравнений вида $xa = 0$. Пусть $xc = d, xc' = d' \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$. Так как данные уравнения совместны, то $d \leq c$, $d' \leq c'$ и поэтому $d, d' \in Y$. Следовательно, $dc' = d'$, $d'c = d$, и мы получаем $(d'c)c' = d'$ и $d' \leq cc' \leq c$. Тогда равенство $d'c = d$ превращается в $d' = d$, и поэтому

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y) = \{xc = d \mid c \in S'\}$$

для некоторого $d \in S$ и некоторого $S' \subseteq S \setminus \{0\}$). Таким образом, получаем оценку

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = |\mathrm{Eq}_1^2(Y)| = |S'| \leq |S \setminus \{0\}| = n - 1 < 2(n-1) \leq |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|,$$

и неравенство (103) доказано.

Далее считаем, что множество Y содержит точку 0 и $Y \neq S$. Следовательно, множество $\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ имеет вид

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y) = \{xc = 0 \mid c \in S'\},$$

где S' — некоторое подмножество полурешетки S. Поскольку множество S' не может содержать 0, то $|\mathrm{Eq}_1^2(Y)| \leq n-1$. Поскольку $Y \neq S$, то $\mathrm{Eq}_=^1(Y) = \emptyset$.

Пусть $\mathrm{Eq}_{+0}(Y)$ ($\mathrm{Eq}_{-0}(Y)$)— множество всех уравнений из $\mathrm{Eq}_+(Y)$ ($\mathrm{Eq}_-(Y)$) с левой (правой) частью $x0$. Несложно показать, что

$$\mathrm{Eq}_{+0}(Y) = \{x0 = xa \mid a \in S'\},\ \mathrm{Eq}_{-0}(Y) = \{xa = x0 \mid a \in S'\},$$

и поэтому множества $\mathrm{Eq}_{+0}^1(Y), \mathrm{Eq}_{-0}^1(Y), \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ состоят из одного и того же числа элементов. Обозначим мощность данных множеств через k.

Пусть

$$\mathrm{Eq}_{++}(Y) = \mathrm{Eq}_+(Y) \setminus \mathrm{Eq}_{+0}(Y) = \{xa = xb \mid a < b, a \neq 0\} \cap \mathrm{Eq}_+(Y),$$

$$\mathrm{Eq}_{--}(Y) = \mathrm{Eq}_-(Y) \setminus \mathrm{Eq}_{-0}(Y) = \{xb = xa \mid a < b, a \neq 0\} \cap \mathrm{Eq}_-(Y).$$

Ниже для каждого из уравнений множеств $\mathrm{Eq}_{\parallel}(Y), \mathrm{Eq}_{++}(Y), \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ будет построено множество $\mathrm{Eq}_{\parallel}(\emptyset), \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ несовместных над S уравнений:

$$xa = xb \in \mathrm{Eq}_{\parallel}(Y) \Rightarrow xa = b \in \mathrm{Eq}_{\parallel}(\emptyset)$$

(уравнению $xb = xa \in \mathrm{Eq}_{\parallel}(Y)$ соответствует уравнение $xb = a \in \mathrm{Eq}_{\parallel}(\emptyset)$),

$$xa = xb \in \mathrm{Eq}_{++}(Y) \Rightarrow xb = a \in \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset),$$

$$xa = 0, xa' = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y) \Rightarrow \begin{cases} xa' = a \in \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset), \text{ если } a \not\leq a', \\ xa = a' \in \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset), \text{ если } a \leq a' \end{cases}$$

Из построения легко следует, что все уравнения множества

$$U = \mathrm{Eq}_{\parallel}(\emptyset) \cup \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset) \cup \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$$

несовместны над S.

Последовательно докажем следующие утверждения.

1. *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)=\emptyset$. Действительно, множество $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)$ состоит из уравнений $xa=b$, где $a\parallel b$, однако множество $\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)$ состоит из уравнений $xa=b$, где $b>a$.

2. *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)=\emptyset$. Допустим, что $xa=b\in\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$. Это означает, что существуют уравнения $xa=xb\in\mathrm{Eq}_{\|}(Y)$, $xa=0,xb=0\in\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ и $a\parallel b$. Поскольку все уравнения $xa=xb,xa=0,xb=0$ эквивалентны друг другу, то получаем

$$ab\in V_S(xa=xb)\Rightarrow ab\in V_S(xa=0)\Rightarrow ab=0\Rightarrow$$
$$b\in \mathrm{V}_S(xa=0)\Rightarrow b\in \mathrm{V}_S(xb=0)\Rightarrow b=0,$$

что противоречит $a\parallel b$.

3. *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)=\emptyset$. Допустим, что $xa=b\in\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$. Это означает, что существуют уравнения $xa=xb\in\mathrm{Eq}_{++}(Y)$, $xa=0,xb=0\in\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ и $a<b$. Поскольку все уравнения $xa=xb,xa=0,xb=0$ эквивалентны друг другу, то получаем

$$a\in V_S(xa=xb)\Rightarrow a\in V_S(xa=0)\Rightarrow a=0\Rightarrow x0=xb\in\mathrm{Eq}_{++}(Y).$$

что противоречит определению множества $\mathrm{Eq}_{++}(Y)$.

4. Из доказанных выше утверждений следует, что *множества* $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset),\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset),\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ *попарно не пересекаются.*

5. Из построения множеств $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset),\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset),\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ находим их мощности:

$$|\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)|=|\mathrm{Eq}_{\|}(Y)|,\ |\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)|=|\mathrm{Eq}_{++}(Y)|,$$
$$|\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)|=\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}.$$

6. *Докажем, что* $|\mathrm{Eq}_{--}(Y)|=|\mathrm{Eq}_{++}(Y)|\leq(n-1)-k$. Равенство $|\mathrm{Eq}_{--}(Y)|=|\mathrm{Eq}_{++}(Y)|$ легко следует из определения множеств $\mathrm{Eq}_{--}(Y),\mathrm{Eq}_{++}(Y)$. Допустим, что существуют уравнения $xa=xb\in\mathrm{Eq}_{+}(Y)$, $xa'=xb\in\mathrm{Eq}_{+}(Y)$, где $a\neq a'$, $a<b,a'<b$.

   Используя эквивалентность уравнений $xa=xb$, $xa'=xb$, получаем

$$a,a'\in \mathrm{V}_S(xa=xb)=\mathrm{V}_S(xa'=xb)\Rightarrow a'a=a'b,aa'=ab\Rightarrow a'a=a',aa'=a\Rightarrow a=a',$$

что противоречит выбору уравнений $xa = xb$, $xa' = xb$.

Следовательно, *каждое уравнение* $xa = xb$ *множества* $\mathrm{Eq}_+(Y)$ *однозначно определяется константой в правой части уравнения.*

Пусть $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{++}(Y)$. Поскольку $b \neq 0$, то по доказанному выше элемент b не может входить ни в одно из k уравнений множества $\mathrm{Eq}_{+0}(Y) \subseteq \mathrm{Eq}_+(Y)$, и мы получаем не более $(n-1)-k$ возможных значений для b. Следовательно, $|\mathrm{Eq}_{--}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| \leq (n-1)-k$.

7. *Существует не менее* $2n-3$ *несовместных над* S *уравнений, не входящих во множество* U. Пусть

$$U' = \{x0 = a \mid a \neq 0\} \cup \{xa = 1 \mid a \notin A\},$$

где

$$A = \begin{cases} \{1, c\}, \text{ если } Y = \{x \mid x \leq c\}, \\ \{1\}, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Ясно, что все уравнения из множества U' несовместны и $|U'| \geq n-1+n-2 = 2n-3$. Покажем, что $U' \cap U = \emptyset$. Из построения множества U следует, что уравнения вида $x0 = a$ не могут принадлежать множеству U. Допустим, что $xa = 1 \in U' \cap U$ для некоторого $a \in S$. Следовательно, либо $xa = x1 \in \mathrm{Eq}_{++}(Y)$ либо $xa = 0, x1 = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$. В первом случае получаем $Y = \{x \mid x \leq a\}$, но тогда $A = \{1, a\}$, и уравнение $xa = 1$ не могло попасть в множество U'. Во втором случае имеем $Y = \{0\}$, что противоречит выбору множества Y.

Осталось показать, что выполнении условия $n \geq 6$ мы получаем $|U| + |U'| > |\mathrm{Eq}_1(Y)|$. Имеем

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{--}(Y)| + |\mathrm{Eq}_1^2(Y)| + |\mathrm{Eq}_{+0}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{-0}(Y)| =$$
$$|\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{--}(Y)| + 3k \leq |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + (n-1) + 2k,$$

$$|U| = |\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)| + |\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)| + |\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Следовательно,

$$|U| + |U'| \geq |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + 2n - 3.$$

Выясним, когда выполнено неравенство $|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |U| + |U'|$:

$$|\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + (n-1) + 2k < |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + 2(n-1) \Leftrightarrow$$

$$(n-1) + 2k < \frac{k(k-1)}{2} + 2n - 3 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 2n - 4 > 0.$$

Дискриминант левой части последнего неравенства равен $D = 25 - 4(2n-4)$ и при $n \geq 6$ мы имеем $D < 0$. Следовательно, неравенство $k^2 - 5k + 2(n-1) > 0$ выполнено для любого k, и мы получили (103). ◄

Элемент $s \in S$ будем называть *суператомным*, если для каждого атома a полурешетки S выполнено $s \geq a$. Множество всех суператомных элементов полурешетки S будем обозначать через $Super(S)$. Отметим, что для любой полурешетки S порядка $n \geq 2$ множество $Super(S)$ непусто, поскольку $1 \in Super(S)$. Например, $Super(L_n) = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $Super(F_n) = \{1\}$.

Лемма 6.9. *Для любого элемента b полурешетки S выполнено*

$$\mathrm{V}_S(xb = 0) = \{0\} \Leftrightarrow b \in Super(S).$$

Доказательство. Если существует атом $a \not\leq b$, то $ab = 0$ и $a \in \mathrm{V}_S(xb = 0)$.

Докажем обратное утверждение. Допустим, что существует ненулевой элемент $a \in \mathrm{V}_S(xb = 0)$ и a' — произвольный атом со свойством $a' \leq a$. Тогда неравенство $0 = ab \geq a'b$ влечет $a'b = 0$ и поэтому $a' \not\leq b$, что противоречит $b \in Super(S)$. ◄

Лемма 6.10. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$ и $Y = \{0\}$. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|.$$

Доказательство. Ниже мы будем использовать обозначения, введенные в доказательстве леммы 6.8.

Поскольку $Y = \{0\}$, то $\mathrm{Eq}_{++}(Y) = \mathrm{Eq}_{--}(Y) = \emptyset$. Пусть $xa = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$, тогда по лемме 6.9 $a \in Super(S)$. Таким образом,

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y) = \{xa = 0 \mid a \in Super(S)\},$$

$$\mathrm{Eq}_{+0}(Y) = \{x0 = xa \mid a \in Super(S)\},\ \mathrm{Eq}_{-0}(Y) = \{xa = x0 \mid a \in Super(S)\}.$$

Обозначим $k = |\mathrm{Eq}_1^2(Y)| = |\mathrm{Eq}_{+0}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{-0}(Y)| = |Super(S)|$. Из определения величины k мы получаем $1 \leq k \leq n-1$.

Множества $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ определяются как в лемме 6.8, и поэтому $|\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)|$, $|\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)| = k(k-1)/2$. Обозначим объединение множеств $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ через U.

Рассмотрим множество уравнений

$$U' = \{xa = b \mid a \notin Super(S), b \in Super(S)\},\ |U'| = k(n-k).$$

Докажем следующие утверждения.

1. *Все уравнения из множества U' несовместны.* Допустим, что $s \in \mathrm{V}_S(xa = b)$, тогда

   $$sa = b \Rightarrow a \geq b \Rightarrow a \in Super(S),$$

   что противоречит свойствам элемента a.

2. *Докажем, что $U \cap U' = \emptyset$.* Уравнение $xa = b$ принадлежит множеству U ровно в двух случаях: либо $xa = 0, xb = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ либо $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{\|}(Y)$. В первом случае по лемме 6.9 получаем $a \in Super(S)$ и поэтому уравнение $xa = b$ не может принадлежать множеству U'.

   Рассмотрим второй случай и допустим, что $xa = b \in U'$. Так как $a \parallel b$, то $a \neq 0$. Точка $s = ab$ является решением уравнения $xa = xb$. Поскольку $Y = \{0\}$, то $ab = 0$. Однако если рассмотреть произвольный атом $0 < a' \leq a$, то в силу $b \in Super(S)$ имеем

   $$0 = a'0 = a'(ab) = (a'b)a = a'a = a',$$

   что противоречит выбору элемента $a' \neq 0$.

Лемма будет доказана, если

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |U| + |U'|. \tag{105}$$

Имеем

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + 3k,$$
$$|U| + |U'| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k).$$

Неравенство (105) эквивалентно выполнению следующих неравенств для всех $k \in [1, n-1]$.

$$3k < \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k) \Leftrightarrow$$

$$k^2 + 7k - 2kn < 0 \Leftrightarrow k(k-(2n-7)) < 0 \Leftrightarrow .$$

$$0 < k < 2n - 7 \tag{106}$$

При $n \geq 7$ справедливо неравенство $2n - 7 > n - 1$, и поэтому неравенство (106) выполнено для всех $k \in [1, n-1]$. Рассмотрим теперь случай $n = 6$. Неравенство (106) выполнено для всех полурешеток с $0 < k < 2 \cdot 6 - 7 = 5$. Осталось показать, что неравенство (106) выполнено для каждой полурешетки порядка 6 с $k = |Super(S)| = 5$. Однако единственной полурешеткой с параметрами $n = 6, k = 5$ является полурешетка L_6, для которой неравенство (106) следует непосредственно из приведенной в параграфе 6.1 таблицы 1. ◀

Теорема 6.7 непосредственно следует из лемм 6.8, 6.10. Заметим, что при $n = 5$ утверждение теоремы 6.7 становится неверным (для полурешетки L_5 имеем $|\mathrm{Eq}_1(\{0\})| = 3(5-1) = 12$, $|\mathrm{Eq}_1(\emptyset)| = 5(5-1)/2 = 10$).

В заключение обсудим, насколько "естественно" было выбрано множество Eq_m.

Замечание 6.11. *Существуют и другие способы определить множество уравнений Eq_m от не более чем m переменных. Укажем лишь два наиболее естественных из них:*

1. *добавить в текущее множество Eq_m все уравнения вида $a = t(X)b$;*

2. *оставить во множестве Eq_m ровно одно уравнение из каждой пары симметричных уравнений $t(X)a = s(X)b$, $s(X)b = t(X)a$.*

Отметим, что оба новых определения множества Eq_m сильно увеличивают долю несовместных уравнений в Eq_m, а она и так является достаточно высокой (см. теоремы 6.4, 6.5, 6.7).

Список литературы

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, 219 (1999), 16–79.

[2] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Discriminating and co-discriminating groups, J. Group Theory, 3 (4) (2000), 467–479.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Discriminating completions of hyperbolic groups, Geometriae Dedicata, 92 (2002), 115–143.

[4] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Romankov, Two theorems about equationally Noetherian groups, J. Algebra, 194 (1997), 654–664.

[5] R. Bryant, The verbal topology of a group, J. Algebra, 48 (1977), 340–346.

[6] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, Elements of algebraic geometry and the positive theory of partially commutative groups, to appear in Canadian J. Mathematics, arXiv:0710.4077

[7] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, On systems of equations over free partially commutative groups, arXiv:0810.4867

[8] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, On systems of equations over free products of groups, arXiv:0903.2096

[9] O. Chapuis, $\forall$- free metabelian groups, J. Symbolic Logic, 62 (1997), 159–174.

[10] И. В. Чирков, М. А. Шевелин, Делители нуля в свободных произведениях алгебр Ли с объединением, Сиб. мат. журн., 45 (1) (2004), 229–238.

[11] I. M. Chiswell, V. N. Remeslennikov, Equations in free groups with one variable, J. Group Theory, 3 (4) (2000), 445—466.

[12] A. H. Clifford, The free completely regular semigroup on a set, J. Algebra, 59 (1979), 434-451.

[13] A.H. Clifford, Semigroups admitting relative inverses, Ann. of Math., 42:4 (1941), 1037–1049

[14] Э. Ю. Даниярова, Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2007), 8–39.

[15] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы, Фундам. и прикл. мат., 9 (3) (2003), 37–63.

[16] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля, Фундам. и прикл. мат., 9 (3) (2003), 65–87.

[17] Э. Ю. Даниярова, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ (2005), 1–130.

[18] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Полуобласти и метабелево произведение метабелевых алгебр Ли, Совр. мат. и ее прилож., 14 (2004), 3–10.

[19] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–111.

[20] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания, Фундамент. и прикл. матем., 17 (1) (2012), 65–106.

[21] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian property and , South. Asian Bull. Math., 35 (1) (2011), 35–68.

[22] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и кообласти, Алгебра и логика, 49 (6) (2010), 715–756

[23] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. V. Случай произвольной сигнатуры, Алгебра и логика, 51 (1) (2012), 41–60.

[24] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VI: Геометрическая эквивалентность, Алгебра и логика, принята к печати.

[25] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VII: Универсальная геометрическая эквивалентность, Сиб.мат.журн., послана в журнал.

[26] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VIII: Геометрические эквивалентности и особые классы алгебраических систем, Фунд. и прикл. матем., послана в журнал.

[27] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами IX: Главные универсальные классы и Dis-пределы, Алгебра и логика, послана в журнал.

[28] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures X: Ordinal dimension, Int. J. Algebra Comput., submitted.

[29] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами, Новосибирск, издательсво СО РАН (2016), 243с.

[30] Э. Ю. Даниярова, И. В. Онскуль, Линейные и билинейные уравнения над свободной антикоммутативной алгеброй, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложноть вычислений (2008), 38–49.

[31] Э. Ю. Даниярова, В. Н. Ремесленников, Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли, Алгебра и логика, 44 (3) (2005), 269–304.

[32] Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, Минимаксные алгебраические системы, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2008), 130–136.

[33] R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov, On quadratic equations in free groups, Contemp. Math., 131 (1) (1992), 159–171.

[34] D. Groves, Limits of (certain) CAT(0) groups, I: Compactification, Algebraic and Geometric Topology, 5 (2005), 1325–1364.

[35] D. Groves, Limits of (certain) CAT(0) groups, II: The Hopf property and the shortening argument, arXiv: math/0408080

[36] D. Groves, Limit groups for relatively hyperbolic groups, I: The basic tools, Algebraic and Geometric Topology, 9 (2009), 1423–1466.

[37] D. Groves, Limit groups for relatively hyperbolic groups, II: Makanin-Razborov diagrams, Geometry and Topology, 9 (2005), 2319–2358.

[38] V. Guba, Equivalence of infinite systems of equations in free groups and semigroups to finite subsystems, Mat. Zametki, 40 (3) (1986), 321–324.

[39] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, Нетеровость по уравнениям некоторых разрешимых групп, Алгебра и логика, 46 (1) (2007), 46–59.

[40] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, 48 (3) (2009), 309–341.

[41] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 50 (1) (2011), 3–25.

[42] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп, Алгебра и логика, 51 (4) (2012), 429–457.

[43] T. Harju, J. Karhumaki, M. Petrich, Compactness of systems of equations on completely regular semigroups, Structures in Logic and Computer Science, LNCS 1261 Springer, Berlin, (1997), 268–280.

[44] T. Harju, J. Karhumaki, W. Plandowski, Compactness of systems of equations in semigroups, International Colloquium on Automata, Languages and Programming, (ICALP 1995, Szeged, Hungary) LNCS 944, Springer, (1995), 444–454.

[45] Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford: Clarendon Press (1995), 351 p.

[46] A. Jez, Recompression: a simple and powerful technique for word equations, arXiv:1203.3705

[47] P. R. Jones, Completely simple semigroups: free products, free semigroups and varieties, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 88A (1981), 293–313.

[48] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Irreducible affine varieties over free group I: Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz, J. Algebra, 200 (2) (1998), 472–516.

[49] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Irreducible affine varieties over free group II: Systems in trangular quasi-quadratic form and description of residually free groups, J. Algebra, 200 (2) (1998), 517–570.

[50] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Algebraic geometry over free groups: Lifting solutions into generic points, Contemp. Math., 378 (2005), 213–318.

[51] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Elementary theory of free nonabelian groups, J. Algebra, 302 (2) (2006), 451–552.

[52] M. V. Kotov, Equationally Noetherian property and close properties, Southeast Asian Bulletin Math., 35 (3) (2011), 419–429.

[53] Kryvyi S. L. Compatibility of systems of linear equations over the set of natural numbers // Cybernetics and Systems Analysis, 38(1) (2002), 17–28.

[54] M. Lothaire, Combinatorics on words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 17, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass (1983), 437p.

[55] Е.С. Ляпин, Полугруппы, М., Изд-во физико-математической литературы (1960), 592с.

[56] Г. С. Маканин, Уравнения в свободной группе, Изв. АН СССР, сер. мат., 46 (6) (1982), 1199–1273.

[57] Г. С. Маканин, Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы, Изв. АН СССР. Сер. матем., 48 (4) (1984), 735–749.

[58] G. S. Makanin, Equations in a free semigroup, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 117 (1981), 1–6.

[59] Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I, Матем. сб., 195 (2) (2004), 41–90.

[60] Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II, Матем. сб., 195 (4) (2004), 65–96.

[61] D. Marker, Model theory: An introduction, Springer-Verlag New York (2002), 345p.

[62] W. Maurer, J. Rhodes, A property of finite simple non-abelian groups, Proc. Am. Math. Soc., 16 (1965), 552–554

[63] А. А Мищенко, А. В. Трейер, Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, SEMR, 4 (2007), 460–481.

[64] А. А Мищенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2008), 61–68.

[65] А. А Мищенко, Структура координатных групп для алгебраических множеств в частично коммутативных двуступенно нильпотентных группах, Алгебра и логика, 48(3), (2009), 378–399.

[66] А. А Мищенко, Е. И. Тимошенко Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 52:5 (2011), 1113–1122.

[67] D. Monk, Handbook of Boolean algebras, v.1-3, Elsevier (1989) 1348p.

[68] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Exponential groups 2: Extension of centralizers and tensor completion of CSA-groups, International J. Algebra and Computation, 6 (6) (1996), 687–711.

[69] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups II: Logical foundations, J. Algebra, 234 (2000), 225–276.

[70] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, D. Serbin, Regular free length functions on Lyndon's free $\mathbb{Z}(t)$- group $F^{\mathbb{Z}(t)}$, Contemp. Math., 378 (2005), 37–77.

[71] A. Myasnikov, N. Romanovskii, Krull dimension of solvable groups, J. Algebra, 324 (10) (2010), 2814–2831

[72] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Об униерсальных теориях жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, 50:6 (2011), 802–821.

[73] A.Yu.Ol'shanskii, On residualing homomorphisms and G-subgroups of hyperbolic groups, Int. J. Algebra Comput., 3 (4) (1993), 365–409.

[74] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties, Izrael J. Math., 96 (2) (1996), 511–522.

[75] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties, Siberian Advances in Math., 7 (2) (1997), 64–97.

[76] Б. И. Плоткин, Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре, Алгебра и анализ, 9 (4) (1997), 224–248.

[77] B. Plotkin, E. Plotkin, A. Tsurkov, Geometrical equivalence of groups, Commun. Algebra, 24 (1999), 4015–4025.

[78] B. Plotkin, Seven lectures on the universal algebraic geometry, (2002), arXiv:math.0204245.

[79] B. Plotkin, Algebras with the same (algebraic) geometry, Proc. Steklov Inst. Math., 242 (2003), 165–196,

[80] Б. И. Плоткин, Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией, Фунд. и прикл. мат., 10 (3) (2004), 181–197.

[81] B. Plotkin, Geometrical equivalence, geometrical similarity and geometrical computability of algebras, Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ), 330, (2006), 201–222.

[82] B. Plotkin, Some results and problems related to universal algebraic geometry, Int. J. Algebra Comput., 17 (5–6) (2007), 1133–1164.

[83] B. I. Plotkin, Geometrical equivalence, geometrical similarity, and geometrical compatibility of algebras, J. Math. Sciences (New York), 140 (5) (2007), 716–728.

[84] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Journal of Algebra, 384 (2013), 143–168

[85] Rasin, V.V.,Free completely simple semigroups, Res. in Contemporary Algebra, Matem. Zapiski (Sverdlovsk) (1979), 140–151 (Russian)

[86] А. А. Разборов, О системах уравнений в свободной группе, Изв. АН СССР, сер. мат., 48 (4) (1982), 779–832.

[87] A. Razborov, On the parametrization of solutions for equations in free groups, Intern. J. Algebra Comp. 3 (1993), 251–273.

[88] В. Н. Ремесленников, ∃-свободные группы, Сиб. мат. журн., 30(6) (1989), 153–157.

[89] В. Н. Ремесленников, Размерность алгебраических множеств над свободной метабелевой группой, Фунд. и прикл. мат., 7 (2001), 873–885.

[90] V. Remeslennikov, R. Stöhr, On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group, Algebra Colloq., 11 (2004), 191–214.

[91] V. Remeslennikov, R. Stöhr, On algebraic sets over metabelian groups, J. Group Theory, 8 (2005), 491–513.

[92] V. Remeslennikov, R. Stöhr, The equation $[x, u] + [y, v] = 0$ in free Lie algebras, Intern. J. Algebra and Computation, 17 (5/6) (2007), 1165–1187.

[93] В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, О метабелевых произведениях групп, Алгебра и логика, 43 (3) (2004), 341–352.

[94] В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, 44 (5) (2005), 601–621.

[95] В. Н. Ремесленников, Е. И. Тимошенко, О топологических размерностях u групп, Сиб. мат. журн., 47 (2) (2006), 415–431.

[96] B. Rosenblat, On equations in inverse semigroups, Algebra Universalis, 47 (2) (2002), 153–156.

[97] Н. С. Романовский, И. П. Шестаков, Нетеровость по уравнениям универсальной обертывающей сплетений абелевых алгебр Ли, Алгебра и логика, 47 (4) (2008), 475–490.

[98] Н. С. Романовский, Алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, 46 (4) (2007), 503–513.

[99] Н. С. Романовский, Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, 48 (2) (2009), 258–279.

[100] Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жесткими группами, Алгебра и логика, 48:6 (2009), 793–818.

[101] Н. С. Романовский, Копроизведения жестких групп, Алгебра и логика, 49 (6) (2010), 803–818.

[102] Н. С. Романовский, Об универсальной теории свободной разрешимой группы, Алгебра и логика, 51 (3) (2012), 385-391.

[103] Н. С. Романовский, О неприводимости аффинного пространства в алгебраической геометрии над группой, Алгебра и логика, 52 (3) (2013), 386–391.

[104] Н. С. Романовский, Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жесткими разрешимыми группами, Изв. РАН. Сер. матем, 79 (5) (2015), 201–214.

[105] V. Roman'kov, Equations over groups, Groups Complexity Cryptology, 4 (2012), 191–239.

[106] S. Rudeanu, Lattice Functions and Equations. Springer-Verlag, London (2001), 435p.

[107] Z. Sela, Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams, Publications Mathematiques de l'IHES, 93 (2001), 31–105.

[108] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VI: The elementary theory of a free group, GAFA, 16 (2006), 707–730.

[109] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VII: The elementary theory of a hyperbolic group, Proc. LMS, 99 (2009), 217–273.

[110] Z. Sela, Word Equations I: Pairs and their Makanin-Razborov Diagrams, arXiv:1607.05431.

[111] Общая алгебра т.2 под. ред. Л.А. Скорнякова, М. Наука (1991), 480с.

[112] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 49 (2) (2010), 263–290.

[113] Е. И. Тимошенко, Квазимногообразия, порожденные частично коммутативными группами, Сибирский математический журнал, 54 (4) (2013), 902–913.

[114] Е. И. Тимошенко, Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп, Монографии НГТУ, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (2011), 327с.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в журналах, из списка ВАК

[115] А. Н. Шевляков, Размерность Зарисского алгебраических множеств над коммутативными идемпотентными полугруппами, Вестник Омского Университета, 4 (2010) 45–49.

[116] А. Н. Шевляков, Nullstellensatz и моноид натуральных чисел, Вестник Омского Университета, 2 (2011), 49–55.

[117] А. Н. Шевляков, Элементы алгебраической геометрии над булевыми алгебрами с выделенными элементами, Фундаментальная и прикладная математика, 18 (4) (2013), 197–218

[118] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в полугрупповом языке без констант, Вестник Омского государственного университета, 4 (2013), 60–62.

[119] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в инверсных полугруппах, Вестник Омского государственного университета, 4 (2013), 63–66.

[120] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в конечных простых полугруппах, Алгебра и логика, 53 (1) (2014), 109–129.

[121] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в клиффордовых полугруппах, Вестник Омского университета, 3 (2014), 18–21.

[122] А. Н. Шевляков, Уравнения над вполне простыми полугруппами, Алгебра и логика, 53 (6) (2014), 790–796.

[123] А. Н. Шевляков, Элементы алгебраической геометрии над свободной полурешеткой, Алгебра и логика, 54 (3) (2015), 399–420.

[124] А. Н. Шевляков, Эквивалентные уравнения над полурешетками, Сиб. электр. мат. изв., 13 (2016), 478–490.

[125] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в полугруппах с конечным идеалом, Алгебра и логика, 55 (1) (2016), 87–105.

[126] A. N. Shevlyakov, On irreducible algebraic sets over linearly ordered semilattices, Groups, Complexity and Cryptology, 8 (2) (2016), 187–196.

[127] А. Н. Шевляков, Универсальная алгебраическая геометрия с отношением $\neq$, Алгебра и логика, 55 (4) (2016) 498–511.

Прочие публикации

[128] A. N. Shevlyakov, Algebraic geometry over linear ordered semilattices, Algebra and Model Theory 8, Collection of papers edited by A.G. Pinus et al, Novosibirsk, NSTU (2011), 116-131.

[129] A. N. Shevlyakov, Lectures notes in universal algebraic geometry, preprint, arXiv:1601.02743 (2016), 67pp.

[130] A. N. Shevlyakov, Commutative idempotent semigroups at the service of the universal algebraic geometry, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 35 (2011), 111-136.