

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Новосибирский государственный аграрный университет»

На правах рукописи

Михальчишина Юлия Андреевна

**ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП КОС И ГРУППЫ  
УЗЛОВ**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., доцент  
Бардаков Валерий Георгиевич

Новосибирск – 2017

# Оглавление

Введение . . . . .	4
Глава 1. Предварительные сведения . . . . .	10
1.1 Группа кос и ее обобщения . . . . .	10
1.2 Представления классических кос автоморфизмами . . . . .	12
1.3 Представления виртуальных кос автоморфизмами . . . . .	14
1.4 Метод Магнуса . . . . .	15
1.5 Группа классического зацепления . . . . .	17
Глава 2. Представления кос автоморфизмами . . . . .	20
2.1 Представления виртуальных кос автоморфизмами . . . . .	20
2.1.1 Новое представление группы виртуальных кос . . . . .	20
2.1.2 Продолжения представлений Вады на группу $VB_n$ . . . . .	26
2.1.3 Сравнение известных представлений . . . . .	28
2.2 Представления кос со спайками автоморфизмами . . . . .	30
2.3 Линейные представления группы кос . . . . .	33
2.3.1 Локальные представления группы $B_3$ . . . . .	33
2.3.2 Локальные однородные представления группы $B_n$ . . . . .	38
2.3.3 Линейные представления, построенные по представлениям Вады . . . . .	40
Глава 3. Группы узлов и зацеплений . . . . .	49
3.1 Группы виртуальных зацеплений . . . . .	49
3.1.1 Косовый подход . . . . .	51
3.1.2 Диаграммный подход . . . . .	60
3.1.3 Группы, построенные по представлениям Вады . . . . .	65
3.2 Примеры вычисления групп зацеплений . . . . .	68
3.2.1 Группы зацеплений, построенные по представлениям Вады . . . . .	68

3.2.2 Группы виртуального трилистника . . . . .	75
Заключение . . . . .	80
Литература . . . . .	81

## Введение

### Актуальность и степень разработанности темы исследования

Теория узлов играет значимую роль в современной математике. Как математическая теория, теория узлов восходит к концу восемнадцатого века. Важный вклад в развитие теории узлов внесли Гаусс, Клейн, Ден, Артин, Виртингер, Марков и другие. Прорыв в теории узлов, приведший к современному ее состоянию, решению многих открытых проблем, был осуществлен в последние несколько десятилетий, и связан с именами Джонса, Конвея, Васильева, Концевича, Тураева, Гусарова, Бирман, Кауффмана, Бар-Натана и многих других. Теория узлов продолжает активно развиваться. За открытия в теории узлов Джонс, Виттен и Концевич были удостоены высших математических наград – Филдсовских медалей.

Напомним, что *узел* – это гладкое вложение ориентированной окружности  $S^1$  в трехмерную сферу  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ . Два узла называются *эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм трехмерной сферы на себя, переводящий один узел в другой. Под *зацеплением* мы будем понимать гладкое вложение нескольких несвязных окружностей в  $S^3$ . Хотя узлы являются частным случаем зацеплений, традиционно принято говорить о «теории узлов», подразумевая, что зацепления входят в множество объектов, которые изучает эта теория. Поэтому в термин «узел», мы будем включать более общее понятие «зацепление».

Основная проблема теории узлов – классификация узлов с точностью до эквивалентности. Ключевую роль в ее решении играют *инварианты узлов* – функции, определенные на множестве узлов, значения которых совпадают на класса эквивалентных узлов.

Одним из инвариантов узлов является группа узла  $G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$ , т. е. фундаментальная группа дополнения узла  $K$  в трехмерной сфере  $S^3$ . Группа  $G(K)$  является очень сильным инвариантом. Она распознает триви-

альный узел и тривиальное зацепление (теорема Дена), т. е.  $d$ -компонентное зацепление  $L$  тривиально тогда и только тогда, когда его группа  $G(L)$  изоморфна свободной группе ранга  $d$ . Теорема Дена сводит проблему распознавания тривиального зацепления к проблеме распознавания свободной группы. В общем случае эта проблема неразрешима.

Результат Райдемайстера (1926) позволил свести изучение узлов к изучению их проекций на плоскость. *Диаграммой узла* называется регулярная проекция узла на плоскость, с дополнительной информацией в двойных точках о том, какая дуга проходит сверху (снизу). Райдемайстер доказал, что два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда диаграмму одного из них можно преобразовать в диаграмму другого посредством плоской изотопии и конечной последовательности преобразований Райдемайстера. Эта теорема позволяет строить инварианты узлов.

Наряду с диаграммами, для изучения узлов используются косы. Алгебраическая теория кос была разработана Артином в двадцатых годах прошлого века. С алгебраической точки зрения группа кос  $B_n$  на  $n$  нитях,  $n \geq 1$ , задается порождающими  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2. \quad (2)$$

Теорема Артина утверждает, что две геометрические косы эквивалентны тогда и только тогда, когда слова в алфавите  $\{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ , отвечающие этим косам равны в группе  $B_n$ . Артин построил точное представление группы  $B_n$  в группу автоморфизмов свободной группы, которое позволяет решать проблему равенства слов в  $B_n$ . По представлению Артина строится линейное представление группы кос (представление Бурау). Долгое время существовала гипотеза, что представление Бурау является точным, однако,

к настоящему времени доказано, что оно не точное при  $n \geq 4$ . Тем не менее представление Бурау используется для построения полинома Александера.

Связь между зацеплениями и косами задается двумя теоремами – Александера и Маркова. Теорема Александера утверждает, что любое зацепление можно представить в виде замыкания косы. Теорема Маркова сводит проблему классификации зацеплений к ряду алгебраических проблем для групп кос  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

В последние десятилетия возникли некоторые обобщения теории узлов. Одним из таких обобщений является теория виртуальных узлов, введенная Кауффманом в 1996 году [22]. Кауффман определил группу виртуальных кос, которая играет ту же роль в теории виртуальных узлов, что и классическая группа кос в теории узлов. Для виртуальных узлов доказаны аналоги теорем Александера и Маркова [20, 22, 26].

Как было отмечено выше, группа узла является сильным инвариантом классических узлов. Естественно попробовать определить аналог этого инварианта для виртуального узла. Существует несколько подходов к определению группы виртуальных узлов и зацеплений. Первое определение было дано Кауффманом в 1996, но определенная им группа не отличала виртуальный трилистник от тривиального узла. В работе Бардакова [8] группы виртуальных узлов независимо определялись при помощи представления группы виртуальных кос автоморфизмами свободной группы. Далее было дано определение Сильвера и Вильямс [30, 31] и затем Боден, Диес, Годро, Герлингс, Харпер, Никас [11].

### **Цели и задачи**

К основным целям диссертации относятся:

1. Построение представлений группы виртуальных кос автоморфизмами некоторых групп.
2. Дать определение группы виртуальных зацеплений, являющихся инвариантами зацеплений.

3. Вычисление групп некоторых классических и виртуальных узлов.

### **Основные результаты диссертации**

1. Построено представление группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения свободной и свободной абелевой групп, обобщающее все ранее известные представления [36].
2. Построены продолжения представлений Вады на группу виртуальных кос [37].
3. По каждому из построенных представлений определяется группа виртуального зацепления и доказывається, что она является инвариантом виртуального зацепления [36–38].

### **Научная новизна и значимость работы**

Работа носит теоретический характер. Все основные результаты диссертации являются новыми. Полученные результаты и методы могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп, маломерной топологии и теории узлов. Многие доказанные в диссертации утверждения могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

### **Методы исследования**

В работе используются методы комбинаторной теории групп, теории линейных групп и теория узлов.

### **Апробация работы**

Результаты диссертации докладывались на международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2006); международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2012); международной летней школе-конференции «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (республика Алтай, 2013, 2015, 2017); международной научной конференции «Алгебра и логика, теория и приложения», посвященной 80-летию Владимира Петровича Шункова (Красноярск, 2013); международной конференции «Winter Braids IV»

(Франция, Дижон, 2014); международной молодежной школе-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (Новосибирск, 2014); «Первой российско-китайской конференции по теории узлов и смежным вопросам» (Китай, Пекин, 2014); международной конференции «Knots, Braids and Automorphism Groups» (Новосибирск, 2014); международной конференции «Groups and Graphs, Algorithms and Automata» (Екатеринбург, 2015); «Второй российско-китайской конференции по теории узлов и смежным вопросам» (Новосибирск, 2015).

Результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинаре «Эварист Галуа».

### **Публикации**

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [35–40], при этом работы [35–38] опубликованы в изданиях, которые входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты работ [36, 38] получены в неразделимом соавторстве с В. Г. Бардаковым и М. В. Нецадином.

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю В. Г. Бардакову за поставленные задачи, неоценимую помощь в работе и всестороннюю поддержку.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 84 страницах, включает 1 таблицу и 17 рисунков. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Все утверждения (теоремы, предложения, леммы и следствия) имеют одинарную сквозную нумерацию. Формулы имеют двойную нумерацию: первое число – номер главы, второе – номер формулы в текущей главе. Список литературы содержит 40

наименований. Работы автора по теме диссертации приведены отдельным списком.

## Глава 1. Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения. Если  $a, b$  – элементы некоторой группы  $G$ , то  $a^b = b^{-1}ab$  – сопряжение элемента  $a$  при помощи элемента  $b$ ;  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  – коммутатор элементов  $a$  и  $b$ .

Напомним известные результаты о группе классических кос, группах виртуальных кос и кос со спайками, которые можно найти в [10, 15, 21, 26].

### 1.1. Группа кос и ее обобщения

Группа кос  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , на  $n$  нитях была введена Артином. Она задается порождающими элементами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2. \quad (1.2)$$

Существует гомоморфизм группы  $B_n$  на группу подстановок  $S_n$ , переводящий порождающий  $\sigma_i$  в транспозицию  $(i, i+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашенных кос* и обозначается символом  $P_n$ . Группа  $P_n$  порождается элементами  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , которые выражаются через порождающие группы  $B_n$  следующим образом

$$a_{ii+1} = \sigma_i^2 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \quad \text{при } 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

Группа виртуальных кос  $VB_n$  введена в работе Кауффмана [22], там же выписана её система порождающих и определяющих соотношений. В работе Вершинина [33] построена более компактная система соотношений (приведенная ниже). Группа  $VB_n$  задается порождающими  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ , где  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$  – порождающие группы кос  $B_n$ , удовлетворяющие соотношениям (1.1), (1.2),  $\{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$  – порождающие

симметрической группы  $S_n$ , удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\rho_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.3)$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \quad (1.4)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (1.5)$$

Остальные определяющие соотношения группы  $VB_n$  являются смешанными и имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \quad (1.6)$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (1.7)$$

Отметим, что последнее соотношение равносильно такому:

$$\rho_{i+1} \rho_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (1.8)$$

Как было замечено в работе Гусарова, Поляка и Виро [18] в группе  $VB_n$  не выполняются соотношения

$$\mathcal{F}_1 : \quad \rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}, \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\mathcal{F}_2 : \quad \rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i, \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

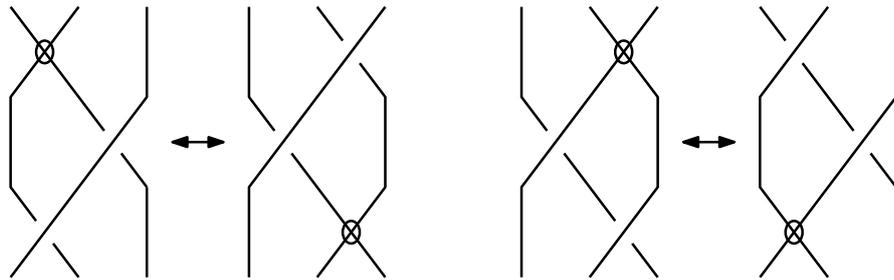


Рис. 1.1. Запрещенные преобразования

Они называются *запрещенными соотношениями* и соответствуют *запрещенным преобразованиям* (см. рис. 1.1).

В работе Фенна, Римани и Рурке [17] введена группа кос со спайками  $WB_n$ , которая порождается элементами  $\sigma_i, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ . Группа,

порожденная элементами  $\sigma_i$  является классической группой кос  $B_n$ . Группа, порожденная элементами  $\alpha_i$  является группой подстановок  $S_n$  и при этом выполняются смешанные соотношения

$$\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2, \quad (1.9)$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2, \quad (1.10)$$

$$\alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2. \quad (1.11)$$

Сравнивая соотношения групп  $VB_n$  и  $WB_n$ , видим, что  $WB_n$  получается из  $VB_n$  введением дополнительного соотношения (1.11), которое соответствует запрещенному соотношению  $\mathcal{F}_1$ . Следовательно существует гомоморфизм

$$\varphi_{VW} : VB_n \longrightarrow WB_n,$$

переводящий  $\sigma_i$  в  $\rho_i$  и  $\rho_i$  в  $\alpha_i$  при всех  $i$ . Таким образом,  $WB_n$  является гомоморфным образом группы  $VB_n$ .

## 1.2. Представления классических кос автоморфизмами

Напомним, что представление  $\varphi : B_n \longrightarrow \text{Aut}(F_n)$ , где  $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  – свободная группа ранга  $n$ , называется *локальным*, если

$$\varphi(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto \lambda(x_i, x_{i+1}), \\ x_{i+1} \longmapsto \mu(x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

где  $\lambda, \mu$  – приведенные слова в свободной группе, порожденной  $x_i$  и  $x_{i+1}$ . Здесь и далее мы указываем только нетривиальное действие на порождающих, подразумевая, что остальные порождающие остаются на месте.

Представление группы кос  $B_n$  в группу автоморфизмов свободной группы  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , задающееся следующим образом

$$\psi_A(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, n - 1$ , называется представлением Артина. Оно является точным и позволяет решить проблему равенства в группе  $B_n$ . Также представление Артина позволяет построить линейное представление группы кос (представление Бурау) и линейное представление группы крашенных кос (представление Гаснера).

В работе Вады [34] построены семь типов локальных представлений группы кос  $B_n$  в группу  $\text{Aut}(F_n)$ . Вада высказал предположение, что ими исчерпываются все возможные локальные представления группы кос  $B_n$  в группу  $\text{Aut}(F_n)$ . Это предположение доказал Ито [19]. Из этих семи типов четыре являются точными (см. [29]). Приведем эти представления

1. Представление  $w_{1,r}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 0$ , определяется формулой:

$$w_{1,r}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^r x_{i+1} x_i^{-r}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i. \end{cases}$$

Отметим, что при  $r = 1$  это представление Артина.

2. Представление  $w_2$  определяется формулой:

$$w_2(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \mapsto x_i. \end{cases}$$

3. Представление  $w_3$  определяется формулой:

$$w_3(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^2 x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}. \end{cases}$$

4. Представление  $w_4$  определяется формулой:

$$w_4(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{-1}. \end{cases}$$

Крисп и Парис [13] доказали, что существует автоморфизм  $\chi : F_n \longrightarrow F_n$  такой, что

$$\chi \circ w_3(\sigma_i) \circ \chi^{-1} = w_2(\mu(\sigma_i)), \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

где  $\mu : B_n \longrightarrow B_n$  – инволюция, посылающая  $\sigma_i$  в  $\sigma_i^{-1}$ .

### 1.3. Представления виртуальных кос автоморфизмами

В настоящем параграфе мы перечислим известные представления группы виртуальных кос  $VB_n$  автоморфизмами.

Представление группы виртуальных кос  $\varphi_A : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n+1})$  в группу автоморфизмов свободной группы  $F_{n+1} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \rangle$  ранга  $n + 1$  было рассмотрено в работе Бардакова [8]. Мантуров [3] изучал инварианты кос. Из его работы можно получить  $\varphi_A$ .

$$\varphi_A(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases} \quad \varphi_A(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^y, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^y, \end{cases}$$

Представление  $\varphi_A$  является продолжением представления Артина на группу виртуальных кос  $VB_n$ .

Для пары натуральных чисел  $n$  и  $k$  определим группу  $F_{n,k} = F_n * \mathbb{Z}^k$  как свободное произведение свободной группы ранга  $n$  и свободной абелевой группы ранга  $k$ . Будем считать, что  $F_n$  свободно порождается элементами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\mathbb{Z}^k$  свободно порождается элементами  $v, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ . Отметим, что  $F_{n,1} = F_{n+1}$ .

Представлением Сильвера-Вильямс [30] будем называть представление  $\varphi_{SW} : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,n+1})$  группы виртуальных кос  $VB_n$  в группу автоморфизмов группы  $F_{n,n+1}$ , определенное действием на порождающих

$$\varphi_{SW}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^v, \end{cases} \quad \varphi_{SW}(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases}$$

$$\varphi_{SW}(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases} \quad \varphi_{SW}(\rho_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases}$$

Легко проверить, что элементу  $\sigma_i^{-1}$  отвечает автоморфизм

$$\varphi_{SW}(\sigma_i^{-1}) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^{v-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto \left( x_{i+1}^{-v-1} x_i x_{i+1}^{u_i} \right)^{u_{i+1}^{-1}}, \end{cases} \quad \varphi_{SW}(\sigma_i^{-1}) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i. \end{cases}$$

Покажем, что представление  $\varphi_{SW}$  обобщает представление  $\varphi_A$ , определенное в начале параграфа. Если положить

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = y, v = y^{-1},$$

и вместо порождающих  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ввести новые порождающие:

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2^y, z_3 = x_3^{y^2}, \dots, z_n = x_n^{y^{n-1}},$$

то полученная группа будет изоморфна  $F_{n+1}$ .

На порождающих  $z_1, z_2, \dots, z_n$  представление Сильвера-Вильямс действует по правилу

$$\varphi_{SW}(\sigma_i) : \begin{cases} z_i \mapsto z_i z_{i+1} z_i^{-1}, \\ z_{i+1} \mapsto z_i, \end{cases} \quad \varphi_{SW}(\rho_i) : \begin{cases} z_i \mapsto z_{i+1}^{y^{-1}}, \\ z_{i+1} \mapsto z_i^y, \end{cases}$$

а это и есть представление  $\varphi_A$ .

Представление Бодена - Диес - Годро - Герлингс - Харпер - Никас было построено в работе [11]. Будем обозначать его символом  $\varphi_{BD}$ . Пусть  $F_{n,2} = F_n * \mathbb{Z}^2$ , где  $F_n$  свободно порождается элементами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\mathbb{Z}^2$  свободно порождается элементами  $v, u$ . Представление  $\varphi_{BD} : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,2})$  определяется действием на порождающих:

$$\varphi_{BD}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-u}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^u, \end{cases} \quad \varphi_{BD}(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^v. \end{cases}$$

#### 1.4. Метод Магнуса

Напомним определения и основные свойства производных Фокса [10, гл. 3].

Пусть  $G$  – группа,  $\mathbb{Z}$  – кольцо целых чисел,  $\mathbb{Z}G$  – групповое кольцо группы  $G$ . Для каждого  $j = 1, 2, \dots, n$  определим отображение

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \rightarrow \mathbb{Z}F_n$$

следующими правилами

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
2) \quad \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j} &= \begin{cases} -x_i^{-1} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
3) \quad \frac{\partial(wv)}{\partial x_j} &= \frac{\partial w}{\partial x_j}(v)^\tau + w \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad w, v \in \mathbb{Z}F_n, \\
4) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum a_g g \right) &= \sum a_g \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad a_g \in \mathbb{Z}, g \in F_n,
\end{aligned}$$

где  $\tau : \mathbb{Z}F_n \longrightarrow \mathbb{Z}$  – операция тривиализации, посылающая все порождающие группы  $F_n$  в единицу кольца  $\mathbb{Z}$ .

Пусть  $\varphi$  – гомоморфизм группы  $F_n$  в некоторую группу  $G$ . Символом  $F_n^\varphi$  обозначим образ группы  $F_n$  при гомоморфизме  $\varphi$ . Пусть  $A_\varphi$  такая подгруппа группы  $\text{Aut}(F_n)$ , для которой справедливы равенства

$$x^\varphi = (x^\alpha)^\varphi$$

при всех  $x \in F_n$  и  $\alpha \in A_\varphi$ . Сопоставим автоморфизму  $\alpha \in A_\varphi$  матрицу

$$\|\alpha\| = \left[ \left( \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j} \right)^\varphi \right]_{i,j=1}^n$$

порядка  $n$  с элементами из  $\mathbb{Z}F_n^\varphi$ . Построенное таким образом отображение

$$\rho : A_\varphi \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}F_n^\varphi)$$

называется представлением Магнуса группы  $A_\varphi$ . По теореме Артина [10] группа  $B_n$  является подгруппой  $\text{Aut}(F_n)$ . В частности, если в качестве  $\varphi$  взять гомоморфизм группы  $F_n$  на бесконечную циклическую группу с порождающим  $t$  и положить  $x_i^\varphi = t, i = 1, 2, \dots, n$ , то мы получим представление Бурау

$$\rho_B : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]).$$

$$\rho_B(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $I_m$  – единичная матрица порядка  $m$ . Представление  $\varphi : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$  называется *локальным*, если

$$\varphi(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $R_i$  – матрица порядка 2.

Локальное линейное представление называется *однородным*, если  $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1}$ .

### 1.5. Группа классического зацепления

Напомним определение группы зацепления [15]. Пусть  $L$  – классическое зацепление в  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ , его *группой*  $G(L)$  называется фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L)$  дополнения  $L$  в  $\mathbb{S}^3$ .

Чтобы найти порождающие и соотношения группы  $G(L)$  можно использовать либо диаграмму зацепления, либо представить зацепление как замыкание косы и использовать представление Артина.

Опишем подход Виртингера, позволяющий по диаграмме найти группу зацепления. Пусть  $D(L)$  – некоторая диаграмма зацепления  $L$ . Каждой компоненте связности диаграммы сопоставим порождающий, а каждому перекрестку сопоставим соотношение  $c = aba^{-1}$  для положительного пере-

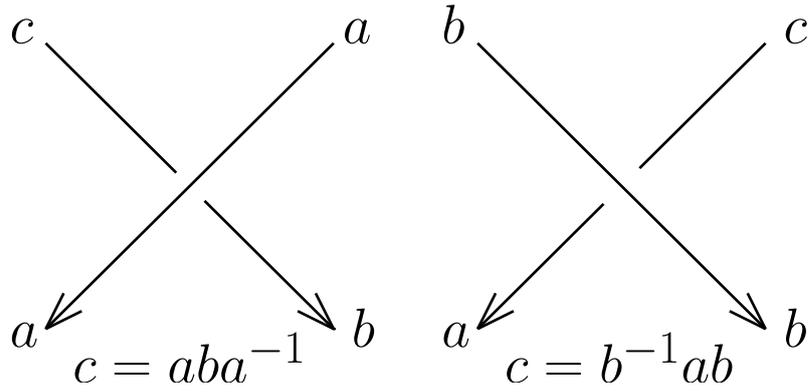


Рис. 1.2. Соотношения в положительном и отрицательном перекрестках

крестка (см. рис. 1.2 слева) и  $c = b^{-1}ab$  для отрицательного перекрестка (см. рис. 1.2 справа).

Тогда группа  $G(L)$  задается порождающими  $a, b, c, \dots$  и системой соотношений по всем перекресткам диаграммы.

Одна и та же группа может быть задана различными системами порождающих и соотношений. При этом они связаны преобразованиями Титце. Пусть группа  $G$  имеет следующее представление в виде системы порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1 \rangle.$$

Теорема Титце [15, гл. IV] утверждает, что это представление группы  $G$  может быть преобразовано в любое другое представление группы  $G$  применением конечной последовательности операций следующего типа и обратных к ним, называемых *преобразованиями Титце*:

1) Добавление соотношения  $r = 1$ , являющегося следствием соотношений  $r_1 = 1, \dots, r_t = 1$ , к множеству соотношений, что приводит к представлению

$$\langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1, r = 1 \rangle.$$

2) Добавление нового порождающего  $x$  и нового соотношения  $xw^{-1} = 1$ , где  $w$  – это любое слово в алфавите  $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$ , что приводит к пред-

СТАВЛЕНИЮ

$$\langle x_1, \dots, x_n, x \mid r_1 = 1, \dots, r_t = 1, xw^{-1} = 1 \rangle.$$

## Глава 2. Представления кос автоморфизмами

### 2.1. Представления виртуальных кос автоморфизмами

В настоящем параграфе мы определим представление группы виртуальных кос  $VB_n$  автоморфизмами, обобщающее все предыдущие, перечисленные в главе 1. Затем мы покажем, что известные представления не являются точными при  $n \geq 4$ .

#### 2.1.1. Новое представление группы виртуальных кос

Здесь мы определим новое представление группы  $VB_n$ , которое обобщает представления  $\varphi_A$ ,  $\varphi_{SW}$ ,  $\varphi_{BD}$ , введенные в параграфе . Рассмотрим группу  $F_{n,2n+1} = F_n * \mathbb{Z}^{2n+1}$ , где  $\mathbb{Z}^{2n+1}$  – свободная абелева группа с базисом  $u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ . Справедлива

**ТЕОРЕМА 1** *Отображение  $\varphi_M : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$ , заданное действием на порождающих*

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{v_0}, \end{cases} \quad \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \longmapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longmapsto v_i, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{v_{i+1}}, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \longmapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longmapsto v_i, \end{cases}$$

*определяет представление группы  $VB_n$  в группу  $\text{Aut}(F_{n,2n+1})$ .*

Заметим, что отображение  $\varphi_M$  является *локальным*, т. е. каждый из порождающих  $\sigma_i$  и  $\rho_i$  нетривиально действует только на элементах  $x_i, x_{i+1}$ ,

$u_i, u_{i+1}, v_i, v_{i+1}$  **Доказательство.** Отображение  $\varphi_M(\sigma_i)$  является автоморфизмом. Легко проверить, что элемент  $\varphi_M(\sigma_i^{-1})$  действует на порождающих группы  $F_n$  по правилу

$$\varphi_M(\sigma_i^{-1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v_0^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto \left( x_{i+1}^{-v_0^{-1}} x_i x_{i+1}^{u_i} \right)^{u_{i+1}^{-1}}. \end{cases}$$

Надо проверить, что при действии отображения  $\varphi_M$  соотношения группы  $VB_n$  переходят в соотношения. Легко проверить, что для соотношений коммутативности это так в силу того, что представление  $\varphi_M$  является локальным.

Проверим справедливость соотношения

$$\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i) = \varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1}).$$

Для этого найдем действие автоморфизма  $\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i)$  на порождающих  $x_1, \dots, x_n$ . Здесь и далее действие будет слева направо. Имеем

$$\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_{i+2}^{u_i u_{i+1}} x_{i+1}^{-u_i u_{i+2} v_0} x_i^{-u_{i+2} v_0}, \\ x_{i+1} \mapsto \left( x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-u_{i+1} v_0} \right)^{v_0}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0^2}, \end{cases}$$

Аналогично, находим действие автоморфизма  $\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1})$ :

$$\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\sigma_i)\varphi_M(\sigma_{i+1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i \left( x_{i+1} x_{i+2}^{u_{i+1}} x_{i+1}^{-u_{i+2} v_0} \right)^{u_i} x_i^{-u_{i+2} v_0}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_0} x_{i+1}^{v_0 u_i} x_i^{-v_0^2 u_{i+1}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0^2}, \end{cases}$$

Сравнивая полученные автоморфизмы, видим, что длинное соотношение группы кос выполняется на группе  $F_n$ . То, что соотношение выполняется при действии на подгруппах, порожденных элементами  $u_j$  и  $v_j$  следует из того, что на этих порождающих автоморфизмы  $\varphi_M(\sigma_i)$  действуют перестановками.

Проверим справедливость смешанного соотношения:

$$\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1})\varphi_M(\sigma_i) = \varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1}).$$

Для этого найдем действие автоморфизма  $\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1})\varphi_M(\sigma_i)$  на порождающих  $x_1, \dots, x_n$ . Имеем

$$\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1})\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_i^{-1}v_{i+1}^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-u_{i+1}v_0})^{v_{i+2}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0 v_{i+2}}, \end{cases}$$

Аналогично, находим действие автоморфизма  $\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1})$ . Получим

$$\varphi_M(\sigma_{i+1})\varphi_M(\rho_i)\varphi_M(\rho_{i+1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_{i+1}^{-1}v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_{i+2}^{-1}} x_{i+1}^{v_{i+2}u_i} x_i^{-v_{i+2}u_{i+1}v_0}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_{i+2}v_0}. \end{cases}$$

Сравнивая полученные автоморфизмы, видим, что смешанное соотношение группы кос выполняется на порождающих группы  $F_n$ . То, что соотношение выполняется при действии на подгруппах, порожденных элементами  $u_j$  и  $v_j$  следует из того, что на этих порождающих автоморфизмы  $\varphi_M(\sigma_i)$  и  $\varphi_M(\rho_i)$  действуют перестановками.

Остальные соотношения проверяются аналогично.  $\square$

Покажем, что представление  $\varphi_M$  обобщает представление  $\varphi_{SW}$  и представление  $\varphi_{BD}$ . Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1** 1) Если в группе  $F_{n,2n+1}$  положить

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = v^{-1}, \quad v_0 = 1,$$

и ввести новые порождающие

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2^v, \quad z_3 = x_3^{v^2}, \dots, z_n = x_n^{v^{n-1}}, \quad w_i = v^{-1}u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то получим группу  $F_{n,n+1}$ , на которой представление  $\varphi_M$  индуцирует представление  $\varphi_{SW}$ .

2) Если в группе  $F_{n,2n+1}$  положить

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1, v_0 = u, v_1 = v_2 = \dots = v_n = v,$$

то получим группу  $F_{n,2}$ , на которой представление  $\varphi_M$  индуцирует представление  $\varphi_{BD}$ .

**Доказательство.** 1) Заметим, что на новых порождающих  $z_1, \dots, z_n$  автоморфизмы  $\varphi_M(\sigma_i)$  и  $\varphi_M(\rho_i)$  действуют по правилу

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} z_i \mapsto z_i z_{i+1}^{v^{-1}u_i} z_i^{-u_{i+1}}, \\ z_{i+1} \mapsto z_i^v, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} z_i \mapsto z_{i+1}, \\ z_{i+1} \mapsto z_i. \end{cases}$$

Полагая  $w_i = v^{-1}u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , получим представление Сильвера-Вильямса.

Вторая часть утверждения проверяется аналогично.  $\square$

Группа виртуальных крашенных кос  $VP_n$  является ядром гомоморфизма  $VB_n \rightarrow S_n$ , при котором

$$\sigma_i \mapsto \rho_i, \quad \rho_i \mapsto \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Как было установлено в [7], группа  $VP_n$  порождается элементами

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \quad \lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda_{ij} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$

$$\lambda_{ji} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i+1,i} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1}, \quad 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

Найдем образы порождающих  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{ji}$ ,  $1 \leq i > j \leq n$ , при отображении  $\varphi_M$ .

Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2** Представление  $\varphi_M$  действует на порождающих группы  $VP_n$  по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_M(\lambda_{i,i+1}) &: \begin{cases} x_i \mapsto (x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1}^{u_{i+1}})^{u_i^{-1}v_{i+1}^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{v_i}, \end{cases} \\ \varphi_M(\lambda_{i+1,i}) &: \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{v_{i+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_i^{-v_{i+1}}x_{i+1}^{v_i^{-1}}x_i^{v_{i+1}u_i})^{u_{i+1}^{-1}}, \end{cases} \\ \varphi_M(\lambda_{ij}) &: \begin{cases} x_i \mapsto (x_j^{-v_{i+1}^{-1}\dots v_{j-1}^{-1}}x_i x_j^{-v_{i+1}^{-1}\dots v_{j-1}u_j})^{u_i^{-1}v_j^{-1}}, \\ x_j \mapsto x_j^{v_i}, \end{cases} \\ \varphi_M(\lambda_{ji}) &: \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{v_j}, \\ x_j \mapsto (x_i^{-v_j}x_j^{v_i^{-1}\dots v_{j-1}^{-1}}x_i^{v_ju_i})^{u_j^{-1}v_{i+1}\dots v_{j-1}}, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$ .

Построенное представление  $\varphi_M$  не является продолжением представления Артина, которое, как мы знаем, точно на подгруппе  $B_n$ . Покажем, что представление  $\varphi_M$  равносильно более простому представлению, которое является продолжением представления Артина. Положим  $F_{n,n} = F_n * \mathbb{Z}^n$ , где  $F_n = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  – свободная группа ранга  $n$ , а  $\mathbb{Z}^n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  – свободная абелева группа ранга  $n$ . Справедлива

**ТЕОРЕМА 2** Представление  $\tilde{\varphi}_M : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,n})$ , заданное действием на порождающих

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) &: \begin{cases} y_i \mapsto y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i, \end{cases} & \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) &: \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \\ \tilde{\varphi}_M(\rho_i) &: \begin{cases} y_i \mapsto y_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{v_{i+1}}, \end{cases} & \tilde{\varphi}_M(\rho_i) &: \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \end{aligned}$$

равносильно представлению  $\varphi_M$ , т. е.  $\varphi_M(\beta) = 1$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\varphi}_M(\beta) = 1$  для некоторой косы  $\beta \in B_n$ .

Доказательство этой теоремы вытекает из следующих лемм.

**ЛЕММА 1** Если в группе  $F_{n,2n+1}$  ввести новые порождающие  $y_i = (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}}$ ,  $w_i = v_i v_0^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вместо порождающих  $x_i$ ,  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то представление

$$\varphi_M : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$$

будет действовать на новых порождающих  $y_1, \dots, y_n$ ,  $u_1, \dots, u_n$ ,  $v_0, w_1, \dots, w_n$  следующим образом

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} y_i \longmapsto y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ y_{i+1} \longmapsto y_i, \end{cases} \quad \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases} \quad \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} w_i \longmapsto w_{i+1}, \\ w_{i+1} \longmapsto w_i, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} y_i \longmapsto y_{i+1}^{w_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \longmapsto y_i^{w_{i+1}}, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} w_i \longmapsto w_{i+1}, \\ w_{i+1} \longmapsto w_i. \end{cases}$$

**Доказательство.** Найдем действие автоморфизма  $\varphi_M(\sigma_i)$  на  $y_i$ ,  $y_{i+1}$ ,  $w_i$ ,  $w_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_M(\sigma_i)(y_i) &= (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \longmapsto (x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \\ &= (x_i u_i^{-1} x_{i+1} u_i v_0^{-1} u_{i+1}^{-1} x_i^{-1} v_0 u_{i+1} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \\ &= (x_i u_i^{-1} x_{i+1} u_{i+1}^{-1} u_i v_0^{-1} x_i^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \\ &= (x_i u_i^{-1} v_0^{-1} v_0 x_{i+1} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1} v_0^{-1} v_0 u_i x_i^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \\ &= (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} (x_{i+1} u_{i+1}^{-1})^{v_0^{-i}} (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{-v_0^{-(i-1)}} \\ &= y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ \varphi_M(\sigma_i)(y_{i+1}) &= (x_{i+1} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-i}} \longmapsto (x_i^{v_0} u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-i}} = (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} = y_i, \\ \varphi_M(\sigma_i)(w_i) &= v_i v_0^{-1} \longmapsto v_{i+1} v_0^{-1} = w_{i+1}, \\ \varphi_M(\sigma_i)(w_{i+1}) &= v_{i+1} v_0^{-1} \longmapsto v_i v_0^{-1} = w_i, \end{aligned}$$

Найдем действие автоморфизма  $\varphi_M(\rho_i)$  на  $y_i$ ,  $y_{i+1}$ ,  $w_i$ ,  $w_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_M(\rho_i)(y_i) &= (x_i u_i^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \longmapsto (x_{i+1}^{v_i^{-1}} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-(i-1)}} \\ &= (x_{i+1} u_{i+1}^{-1} v_0^{-1})^{v_0^{-i} v_i^{-1} v_0} = y_{i+1}^{w_i^{-1}}, \\ \varphi_M(\rho_i)(w_i) &= v_i v_0^{-1} \longmapsto v_{i+1} v_0^{-1} = w_{i+1}, \\ \varphi_M(\rho_i)(w_{i+1}) &= v_{i+1} v_0^{-1} \longmapsto v_i v_0^{-1} = w_i. \end{aligned}$$

□

В силу доказанной леммы подгруппы

$$F_{n,n} = \langle y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n \rangle, \quad W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle, \quad U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle, \quad V_0 = \langle v_0 \rangle$$

группы  $F_{n,2n+1}$  инвариантны относительно действия представления  $\varphi_M$ . В частности, представление  $\varphi_M$  индуцирует представление  $\tilde{\varphi}_M$  группы  $VB_n$  в группу  $\text{Aut}(F_{n,n})$ . Отметим также, что  $\varphi_M(\sigma_i)$  и  $\varphi_M(\rho_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , действуют на  $W$  и  $U$  перестановкой порождающих. Отсюда следует

**ЛЕММА 2** *Представления  $\varphi_M$  и  $\tilde{\varphi}_M$  равносильны, т. е.  $\varphi_M(\beta) = 1$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\varphi}_M(\beta) = 1$  для некоторого  $\beta \in VB_n$ .*

Из доказанных лемм 1 и 2 следует теорема 2.

Таким образом, представление  $\varphi_M$  обобщает ранее известные представления.

### 2.1.2. Продолжения представлений Вады на группу $VB_n$

Будем обозначать символом  $w_l$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , представления Вады, полагая  $w_1 = w_{1,r}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 0$ . Так как  $B_n$  является подгруппой  $VB_n$ , то естественно попытаться построить продолжения представлений  $w_l$  на группу  $VB_n$ . Построим отображение

$$W_l : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,n}), \quad l = 1, \dots, 4,$$

действующее на  $\sigma_i$  так же как представление Вады  $w_l$ , а образ  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , является автоморфизмом

$$W_l(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{v_{i+1}}. \end{cases}$$

Справедлива

**ТЕОРЕМА 3** *Отображение  $W_l$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , является представлением  $VB_n$  в  $\text{Aut}(F_{n,n})$ , где  $F_{n,n} = F_n * \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{Z}^n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  – свободная абелева группа ранга  $n$ .*

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что отображения  $W_l$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , являются автоморфизмами. Докажем теорему для отображения  $W_1$ . Отображение  $W_1$  является представлением группы  $VB_n$ , если при отображении  $W_1$  соотношения группы  $VB_n$  переходят в соотношения.

Для соотношений коммутативности это так в силу того, что отображение  $W_1$  является локальным. Остается проверить выполнение соотношения (1.7), т. е.

$$W_1(\rho_i)W_1(\rho_{i+1})W_1(\sigma_i) = W_1(\sigma_{i+1})W_1(\rho_i)W_1(\rho_{i+1}) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Вычисляем левую часть соотношения:

$$W_1(\rho_i)W_1(\rho_{i+1})W_1(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_i^{-1}v_{i+1}^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_i^r x_{i+1} x_i^{-r})^{v_{i+2}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_{i+2}}, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+1} \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть соотношения:

$$W_1(\sigma_{i+1})W_1(\rho_i)W_1(\rho_{i+1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_{i+1}^{-1}v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{rv_{i+2}} x_{i+1}^{v_{i+2}} x_i^{-rv_{i+2}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_{i+2}}, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+1} \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (1.7) группы виртуальных кос выполняется. Значит  $W_1$  является представлением  $VB_n$ .

Отображения  $W_2$ ,  $W_3$  и  $W_4$  рассматриваются аналогично.  $\square$

### 2.1.3. Сравнение известных представлений

Чтеренталь [14] установил, что представление  $\varphi_A$  группы  $VB_n$  не является точным при  $n \geq 4$ , найдя элемент из ядра. Используя этот результат, покажем, что и представления  $\varphi_{SW}$ ,  $\varphi_{BD}$ ,  $W_1$  и  $W_2$  также не являются точными при  $n \geq 4$ . Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3** Элемент  $\beta = (\sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3)^3 \in VP_4$  лежит в ядре представлений  $\varphi_{SW}$ ,  $\varphi_{BD}$ ,  $W_1$  и  $W_2$  и не лежит в ядре представлений  $\tilde{\varphi}_M$ ,  $W_3$  и  $W_4$ .

**Доказательство.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $\varphi_{SW}(\beta) = 1$ ,  $\varphi_{BD}(\beta) = 1$ ,  $W_1(\beta) = 1$  и  $W_2(\beta) = 1$ , т. е. эти представления не являются точными при  $n \geq 4$ .

Обозначим далее  $\alpha = \sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3$ . Тогда  $\beta = \alpha^3$ . Находим действие автоморфизма  $\tilde{\varphi}_M(\alpha)$  на порождающих:

$$\tilde{\varphi}_M(\alpha) : \begin{cases} x_1 \mapsto (x_2x_4^{v_3^{-1}}x_2^{-1})^{v_1^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto x_2^{-1}x_1^{v_4}x_2, \\ x_4 \mapsto x_3^{v_4}, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_M(\alpha) : \begin{cases} v_1 \mapsto v_4, \\ v_2 \mapsto v_2, \\ v_3 \mapsto v_1, \\ v_4 \mapsto v_3. \end{cases}$$

Далее находим

$$\tilde{\varphi}_M(\beta) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2^{v_3^{-1}} (x_2^{-1}x_1^{v_4}x_2)^{v_4^{-1}} x_2^{-v_3^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto x_2^{-1}x_2^{v_1v_4^{-1}}x_3x_2^{-v_1v_4^{-1}}x_2, \\ x_4 \mapsto x_2^{-v_1} (x_2x_4^{v_3^{-1}}x_2^{-1})^{v_3} x_2^{v_1}, \end{cases}$$

т. е.  $\tilde{\varphi}_M(\beta) \neq 1$ .

Для автоморфизма  $W_3(\alpha)$  имеем

$$W_3(\alpha) : \begin{cases} x_1 \mapsto \left(x_2^2 x_4^{v_3^{-1}}\right)^{v_1^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2^{x_4^{v_3^{-1}} x_1^{-v_4}}, \\ x_3 \mapsto x_1^{v_4} x_4^{-v_3^{-1}} x_2^{-2} x_4^{v_3^{-1}}, \\ x_4 \mapsto x_3^{v_4}, \end{cases} \quad W_3(\alpha) : \begin{cases} v_1 \mapsto v_4, \\ v_2 \mapsto v_2, \\ v_3 \mapsto v_1, \\ v_4 \mapsto v_3. \end{cases}$$

и

$$W_3(\beta) : \begin{cases} x_1 \mapsto \left[ \left(x_2^2\right)^\zeta x_1^{v_3} x_4^{-v_4^{-1}} x_2^{-2} x_4^{v_4^{-1}} \right]^{v_3^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2^\xi, \\ x_3 \mapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{v_3^{-1} v_4^{-1} v_1} x_1^{-v_1}} x_3 \left(x_2^{-2}\right)^\eta, \\ x_4 \mapsto \left(x_2^2\right)^{v_3} x_4 \left(x_2^{-2}\right)^{v_1 x_4^{v_3^{-1} v_1} x_1^{-v_4 v_1} x_3^{v_4}}, \end{cases}$$

где  $\zeta = x_4^{v_3^{-1}} x_1^{-v_4} x_3^{v_4 v_1^{-1}} x_4^{-v_1^{-1}} \left(x_2^{-2}\right)^{v_1^{-1} v_3}$ ,  $\eta = \zeta x_1^{v_3} x_4^{-v_4^{-1}} \left(x_2^{-2}\right)^{v_3 v_4^{-1}} x_4^{v_4^{-1}}$ ,  $\xi = \eta x_3^{-1} x_1^{v_1} x_4^{-v_3^{-1} v_4^{-1} v_1} \left(x_2^{-2}\right)^{v_4^{-1} v_1} x_4^{v_3^{-1} v_4^{-1} v_1} x_1^{-v_1}$ .

Таким образом,  $W_3(\beta) \neq 1$ .

Находим автоморфизм  $W_4(\alpha)$

$$W_4(\alpha) : \begin{cases} x_1 \mapsto \left(x_2 x_4^{v_3^{-1}} x_2\right)^{v_1^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto x_2^{-1} x_1^{v_4} x_2^{-1}, \\ x_4 \mapsto x_3^{v_4}, \end{cases} \quad W_4(\alpha) : \begin{cases} v_1 \mapsto v_4, \\ v_2 \mapsto v_2, \\ v_3 \mapsto v_1, \\ v_4 \mapsto v_3. \end{cases}$$

Далее находим

$$W_4(\beta) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2^{v_3^{-1}} \left(x_2^{-1} x_1^{v_4} x_2^{-1}\right)^{v_4^{-1}} x_2^{v_3^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto x_2^{-1} x_2^{v_1 v_4^{-1}} x_3 x_2^{v_1 v_4^{-1}} x_2^{-1}, \\ x_4 \mapsto x_2^{-v_1} \left(x_2 x_4^{v_3^{-1}} x_2\right)^{v_3} x_2^{-v_1}, \end{cases}$$

т. е.  $W_4(\beta) \neq 1$ . □

## 2.2. Представления кос со спайками автоморфизмами

В этом параграфе рассмотрим представления группы кос со спайками в группу автоморфизмов некоторого свободного произведения.

Рассмотрим свободное произведение  $F_{n,n+1} = F_n * \mathbb{Z}^{n+1}$ , где  $F_n$  – свободная группа ранга  $n$ , порожденная элементами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\mathbb{Z}^{n+1}$  – свободная абелева группа, порожденная элементами  $v_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ . Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4** *Отображение  $\psi_M : WB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,n+1})$ , определенное действием на порождающих*

$$\psi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{v_0}, \end{cases} \quad \psi_M(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i, \end{cases}$$

$$\psi_M(\alpha_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases} \quad \psi_M(\alpha_i) : \begin{cases} u_i \longmapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longmapsto u_i. \end{cases}$$

*является представлением группы  $WB_n$  в группу  $\text{Aut}(F_{n,n+1})$ .*

**Доказательство.** Видим, что представление  $\psi_M$  группы  $WB_n$  получается из представления  $\varphi_M$  группы  $VB_n$ , если все порождающие  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  отправить в 1. Поэтому достаточно проверить, что выполняется образ соотношения  $\mathcal{F}_1$ , т. е.

$$\psi_M(\alpha_i) \psi_M(\sigma_{i+1}) \psi_M(\sigma_i) = \psi_M(\sigma_{i+1}) \psi_M(\sigma_i) \psi_M(\alpha_{i+1}).$$

Найдем действие автоморфизма  $\psi_M(\alpha_i) \psi_M(\sigma_{i+1}) \psi_M(\sigma_i)$  на порождающих группы  $F_n$ . Имеем

$$\psi_M(\alpha_i) \psi_M(\sigma_{i+1}) \psi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+2}^{u_i} x_i^{-u_{i+2}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-u_{i+1}}, \\ x_{i+2} \longmapsto x_i. \end{cases}$$

Аналогично, находим действие автоморфизма  $\psi_M(\sigma_{i+1})\psi_M(\sigma_i)\psi_M(\alpha_{i+1})$ . Получим

$$\psi_M(\sigma_{i+1})\psi_M(\sigma_i)\psi_M(\alpha_{i+1}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+2}^{u_i} x_i^{-u_{i+2}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-u_{i+1}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i. \end{cases}$$

Сравнивая полученные автоморфизмы, видим, что требуемое соотношение выполняется.  $\square$

Аналогично случаю группы виртуальных кос построим отображения

$$\widetilde{W}_l : WB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_n), \quad l = 1, \dots, 4,$$

продолжающие представления Вады, т. е.  $\widetilde{W}_l(\sigma_i) = w_l(\sigma_i)$ , а образ  $\alpha_i, i = 1, \dots, n - 1$ , определяется автоморфизмом

$$\widetilde{W}_l(\alpha_i) : \begin{cases} x_k \mapsto x_{k+1}, \\ x_{k+1} \mapsto x_k. \end{cases}$$

Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5** *Отображения  $\widetilde{W}_1$  и  $\widetilde{W}_2$  являются представлениями  $WB_n$  в  $\text{Aut}(F_n)$ .*

**Доказательство.** Для того, чтобы построенные отображения  $\widetilde{W}_l, l = 1, 2$ , являлись представлениями группы кос со спайками, нужно, чтобы выполнялись все соотношения группы  $WB_n$ . Как мы упоминали ранее,  $WB_n$  получается из  $VB_n$  введением дополнительного соотношения (1.11). Для  $\widetilde{W}_1$  и  $\widetilde{W}_2$  простым вычислением проверяется выполнение соотношения (1.11), которое совпадает с  $\mathcal{F}_1$ .  $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6** *Отображение*

$$\widetilde{W}_3 : WB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_n)$$

*является представлением группы кос со спайками при условиях*

$$x_k^4 = 1, \quad [x_k, x_j] = 1, \quad k, j = 1, \dots, n.$$

**Доказательство.** Вычисляем левую часть равенства (1.11) под действием  $\widetilde{W}_3$

$$\widetilde{W}_3(\alpha_k)\widetilde{W}_3(\sigma_{k+1})\widetilde{W}_3(\sigma_k) : \begin{cases} x_k \mapsto x_{k+1}^{-1}x_k^{-2}x_{k+1}x_{k+2}, \\ x_{k+1} \mapsto x_k^2x_{k+1}, \\ x_{k+2} \mapsto x_{k+2}^{-1}x_{k+1}^{-1}x_kx_{k+1}x_{k+2}. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть равенства

$$\widetilde{W}_3(\sigma_{k+1})\widetilde{W}_3(\sigma_k)\widetilde{W}_3(\alpha_{k+1}) : \begin{cases} x_k \mapsto x_k^2x_{k+2}, \\ x_{k+1} \mapsto x_{k+2}^{-1}x_k^{-2}x_{k+2}x_{k+1}, \\ x_{k+2} \mapsto x_{k+1}^{-1}x_{k+2}^{-1}x_kx_{k+2}x_{k+1}. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (1.11) группы кос со спайками выполняется при условиях  $x_k^4 = 1$ ,  $[x_k, x_{k+1}] = 1$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .  $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7** *Отображение*

$$\widetilde{W}_4 : WB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_n)$$

*является представлением группы кос со спайками при условиях*

$$x_k^2 = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

**Доказательство.** Вычисляем левую часть равенства (1.11) под действием  $\widetilde{W}_4$

$$\widetilde{W}_4(\alpha_k\sigma_{k+1}\sigma_k) : \begin{cases} x_k \mapsto x_k^{-1}x_{k+2}x_k^{-1}, \\ x_{k+1} \mapsto x_kx_{k+1}x_k, \\ x_{k+2} \mapsto x_k. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть равенства

$$\widetilde{W}_4(\sigma_{k+1})\widetilde{W}_4(\sigma_k)\widetilde{W}_4(\alpha_{k+1}) : \begin{cases} x_k \mapsto x_kx_{k+2}x_k, \\ x_{k+1} \mapsto x_k^{-1}x_{k+1}x_k^{-1}, \\ x_{k+2} \mapsto x_k. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (1.11) группы кос со спайками выполняется при условии  $x_k^2 = 1$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .  $\square$

**Замечание 1.** Соотношение  $\mathcal{F}_2$  не выполняется для  $\widetilde{W}_l$ ,  $l = 1, \dots, 4$ .

### 2.3. Линейные представления группы кос

В этом параграфе найдем линейные локальные представления группы  $B_3$ , далее найдем линейные локальные однородные представления группы  $B_n$ . В конце пункта используя подход Магнуса, построим линейные представления группы кос  $B_n$ , соответствующие представлениям Вады.

#### 2.3.1. Локальные представления группы $B_3$

Рассмотрим линейные локальные представления группы кос  $B_n$  в группу матриц  $GL_n(\mathbb{C})$ . Если

$$\varphi : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

некоторое локальное линейное представление, то все соотношения группы кос должны переходить в соотношения. В силу локальности соотношения коммутативности переходят в соотношения коммутативности, т. е. справедливы равенства

$$\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_j) = \varphi(\sigma_j)\varphi(\sigma_i) \quad \text{при } |i - j| \geq 2.$$

Кроме того, должны выполняться равенства

$$\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Для группы  $B_3$  справедлива

**ТЕОРЕМА 4** Если  $\varphi : B_3 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C})$  – локальное представление группы  $B_3$ , то  $\varphi$  имеет один из следующих двух типов:

$$1) \quad \varphi(\sigma_1) = \left( \begin{array}{cc|c} \alpha(1-d) & \frac{(1-d)(1-\alpha+d\alpha)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\varphi(\sigma_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)(1-d+d\alpha)}{\gamma} \\ 0 & \gamma & d(1-\alpha) \end{array} \right), \text{ где } d, \alpha \neq 1, c, \gamma \neq 0;$$

$$2) \varphi(\sigma_1) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \varphi(\sigma_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{bc}{\gamma} \\ 0 & \gamma & 0 \end{array} \right), \text{ где } bc, \gamma \neq 0.$$

**Доказательство.** Если  $\varphi$  – локальное представление  $B_3$ , то оно определяется образами порождающих  $\varphi(\sigma_1)$  и  $\varphi(\sigma_2)$ . Положим

$$s_1 = \varphi(\sigma_1) = \left( \begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), s_2 = \varphi(\sigma_2) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{array} \right).$$

Справедливо равенство

$$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2.$$

Непосредственными вычислениями находим

$$s_1 s_2 s_1 = \left( \begin{array}{ccc} a^2 + \alpha bc & ab + \alpha bd & \beta b \\ ac + \alpha cd & bc + \alpha d^2 & \beta d \\ \gamma c & \gamma d & \delta \end{array} \right), s_2 s_1 s_2 = \left( \begin{array}{ccc} a & \alpha b & \beta b \\ \alpha c & \alpha^2 d + \beta \gamma & \alpha \beta d + \beta \delta \\ \gamma c & \alpha \gamma d + \gamma \delta & \beta \gamma d + \delta^2 \end{array} \right).$$

Следующая система должна быть разрешима:

$$\begin{cases} a(1-a) = \alpha bc, & \delta(1-\delta) = \beta \gamma d, \\ \alpha c(1-d) = \alpha c, & \beta d(1-\alpha) = \beta \delta, \\ \alpha b(1-d) = \alpha b, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma \delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta \gamma - bc. \end{cases}$$

Из соотношения  $\det(s_1 s_2 s_1) = \det(s_2 s_1 s_2)$  следует условие  $\det(s_1) = \det(s_2)$ , т. е.  $ad - bc = \alpha \delta - \beta \gamma$ .

Решая получившуюся систему уравнений, перебираем все возможные случаи.

**Случай 1.** Предположим, что  $bc \neq 0$ , тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a(1-a) = bca, & \delta(1-\delta) = \beta \gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & \beta d(1-\alpha) = \beta \delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta \gamma - bc, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma \delta. \end{cases}$$

1.1 Допустим, что  $\beta\gamma \neq 0$ , тогда

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & d(1-\alpha) = \delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc. \end{cases}$$

1.1.1 Предположим, что  $\alpha \neq 0$ . Если при этом  $d \neq 0$ , то

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & d(1-\alpha) = \delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$bc = (1-d)(1-\alpha + \alpha d), \quad \beta\gamma = (1-\alpha)(1-d + \alpha d).$$

Таким образом, получаем представление 1):

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} \alpha(1-d) & \frac{(1-d)(1-\alpha+d\alpha)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)(1-d+d\alpha)}{\gamma} \\ \hline 0 & \gamma & d(1-\alpha) \end{array} \right).$$

Если  $d = 0$ , то система принимает вид

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \beta\gamma = bc, \\ \alpha = a, & \delta = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:  $bc = \beta\gamma = 1 - \alpha$ , т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} \alpha & \frac{(1-\alpha)}{c} & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)}{\gamma} \\ \hline 0 & \gamma & 0 \end{array} \right).$$

Это представление 1) при условии, что  $d = 0$ .

1.1.2 Пусть теперь  $\alpha = 0$ . Тогда  $a = 0, bc = \beta\gamma$ . Если при этом  $d \neq 0$ , то  $\beta\gamma = bc = 1 - d$ , т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & \frac{(1-d)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-d)}{\gamma} \\ \hline 0 & \gamma & d \end{array} \right).$$

Это представление 1) при условии  $\alpha = 0$ .

Если  $d = 0$ , то получаем представление 2):

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \frac{bc}{\gamma} & \\ 0 & \gamma & 0 & \end{array} \right).$$

Мы разобрали случай 1.1, в котором  $\beta\gamma \neq 0$ . Разбираем теперь случай, когда  $\beta\gamma = 0$ .

1.2 Из условия  $\beta\gamma = 0$  следует, что  $\alpha\delta \neq 0, \delta = 1$ . Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, \\ \alpha(1-d) = a, \\ \alpha d(d-\alpha) = -bc, \end{cases}$$

из которой находим:

$$a = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha}, \quad bc = \frac{\alpha(\alpha - \alpha^2 - 1)}{(1-\alpha)^2}, \quad d = \frac{1}{1-\alpha},$$

т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{-\alpha^2}{\alpha-1} & \frac{\alpha(\alpha-\alpha^2-1)}{c(1-\alpha)^2} & 0 \\ c & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \alpha & \beta & \\ 0 & \gamma & 1 & \end{array} \right), \quad \beta\gamma = 0.$$

Это представление 1) при условии  $d = \frac{1}{1-\alpha}$ .

**Случай 2.** Предположим, что  $bc = 0$ , тогда  $ad \neq 0, a = 1$ .

2.1 Допустим, что либо  $b \neq 0$ , либо  $c \neq 0$ , тогда система примет вид

$$\begin{cases} a(1-a) = 0, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & \beta d(1-\alpha) = \beta\delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma\delta. \end{cases}$$

Находим  $\alpha = \frac{1}{1-d}$ . Если при этом  $\beta\gamma \neq 0$ , то

$$\beta\gamma = \frac{d(d-d^2-1)}{(1-d)^2}, \quad \delta = \frac{-d^2}{1-d},$$

т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{1-d} & \frac{d(d-d^2-1)}{\gamma(1-d)^2} \\ 0 & \gamma & \frac{-d^2}{1-d} \end{array} \right), \quad bc = 0.$$

Это представление 1) при условии, что  $\alpha = \frac{1}{1-d}$ .

Если  $\beta\gamma = 0$ , то  $\alpha\delta \neq 0$ ,  $\delta = 1$ , тогда получаем следующие образы порождающих:

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d^* & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{array} \right),$$

где  $bc = \beta\gamma = 0$ ,  $d^*$  - корень уравнения  $d^2 - d + 1 = 0$ .

Это представление 1) при условии, что  $\alpha = d$ ,  $bc = \beta\gamma = 0$ ,  $d^2 - d + 1 = 0$ .

2.2 Предположим, что  $b = c = 0$ , тогда система примет вид

$$\begin{cases} \alpha d(d - \alpha) = \beta\gamma, & \delta(1 - \delta) = \beta\gamma d, \\ \gamma d(1 - \alpha) = \gamma\delta, & \beta d(1 - \alpha) = \beta\delta. \end{cases}$$

Если  $\beta\gamma \neq 0$ , то

$$\begin{cases} \alpha d(d - \alpha) = \beta\gamma, \\ d(1 - \alpha) = \delta, \\ \delta(1 - \delta) = \beta\gamma d. \end{cases}$$

Находим, что

$$\beta\gamma = \frac{d(d - d^2 - 1)}{(1 - d)^2}, \quad \delta = \frac{-d^2}{1 - d},$$

т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{1-d} & \frac{d(d-d^2-1)}{\gamma(1-d)^2} \\ 0 & \gamma & \frac{-d^2}{1-d} \end{array} \right).$$

Это представление 1) при условии  $\alpha = \frac{1}{1-d}$ ,  $b = c = 0$ .

Если  $\beta\gamma = 0$ , то

$$\alpha\delta \neq 0, \quad \delta = 1, \quad \alpha = d = \frac{1}{1-d},$$

т. е.

$$s_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad s_2 = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d^* & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{array} \right),$$

где  $bc = \beta\gamma = 0$ ,  $d^*$  – корень уравнения  $d^2 - d + 1 = 0$ .

Это представление 1) при условии, что  $\alpha = d$ ,  $bc = \beta\gamma = 0$ ,  $d^2 - d + 1 = 0$ .

Для наглядности занесем результаты в таблицу 1

				Представление	Условия
$bc \neq 0$	$\beta\gamma \neq 0$	$\alpha \neq 0$	$d \neq 0$	1	
			$d = 0$	1	$d = 0$
		$\alpha = 0$	$d \neq 0$	1	$\alpha = 0$
			$d = 0$	2	
	$\beta\gamma = 0$			1	$d = \frac{1}{1-\alpha}$
$bc = 0$	$c \neq 0$	$\beta\gamma \neq 0$	1	$\alpha = \frac{1}{1-d}$	
		$\beta\gamma = 0$	1	$\alpha = d,$ $d^2 - d + 1 = 0$	
	$b = c = 0$	$\beta\gamma \neq 0$	1	$\alpha = \frac{1}{1-d}$	
		$\beta\gamma = 0$	1	$\alpha = d,$ $d^2 - d + 1 = 0$	

Таблица 1. Локальные представления группы  $B_3$ .

□

### 2.3.2. Локальные однородные представления группы $B_n$

В случае однородного локального представления из результатов теоремы 4 получаем

**СЛЕДСТВИЕ 1** Если  $\varphi : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$  – локальное однородное представление, то  $\varphi$  совпадает с одним из представлений  $\varphi_1, \varphi_2$  или  $\varphi_3$ , которые

определяются следующим образом:

$$\varphi_j : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad j = 1, 2, 3.$$

$$1) \varphi_1(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{1-\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad \gamma \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$2) \varphi_2(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1-d}{c} & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad c \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$3) \varphi_3(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad bc \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что если в представлении  $\varphi_1$  положить  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 1 - t$ , то получим представление Бурау.

**Доказательство.** Чтобы локальное представление было однородным необходимо, чтобы  $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1}$ .

Из локального представления 1) теоремы 4 получаются представление  $\varphi_1$  при условии  $d = 0$ ,  $c = \gamma$  и представление  $\varphi_2$  при условии  $\alpha = 0$ ,  $c = \gamma$ . Из локального представления 2) теоремы 4 получается локальное однородное представление  $\varphi_3$  при условии  $c = \gamma$ .  $\square$

Заметим, что представления  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$  сводятся к представлениям, найденным в работе Тонга, Янга и Ма [32], заменой параметров. Из этой работы следует, что  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  сводятся к представлениям, в которых матрица

$R$  совпадает с одной из матриц:

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.3. Линейные представления, построенные по представлениям Вады

В этом параграфе, используя метод Магнуса, мы построим линейные представления

$$\rho_l : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad l = 1, \dots, 4,$$

соответствующие представлениям Вады  $w_l$ , (в случае  $l = 1$  представление  $\rho_1$  обозначает представление  $\rho_{1,r}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 0$ ). Построенные представления будут локальными, но вообще говоря неоднородными. Тем не менее, мы докажем, что все они в некотором смысле сводятся к представлению Бурау. Более точно, справедлива

**ТЕОРЕМА 5** *Представления  $\rho_l$  группы  $B_n$  в группу  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $l = 1, \dots, 4$  сводятся к представлению Бурау заменой параметров или переходом в другой базис.*

**Доказательство.** Вычислим производные Фокса для представления  $w_1$ . Для простоты символом  $x_j^{\sigma_i}$  будем обозначать  $w_1(\sigma_i)(x_j)$ , т. е. образ порождающего  $x_j$  при автоморфизме  $w_1(\sigma_i)$ . Вычисляем производную от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменной  $x_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} &= \frac{\partial(x_i^r x_{i+1} x_i^{-r})}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i^r)}{\partial x_i} + x_i^r \frac{\partial(x_{i+1} x_i^{-r})}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i^r)}{\partial x_i} + x_i^r x_{i+1} \frac{\partial(x_i^{-r})}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial(x_i^r)}{\partial x_i} - x_i^r x_{i+1} x_i^{-r} \frac{\partial(x_i^r)}{\partial x_i} = (1 - x_i^r x_{i+1} x_i^{-r}) \frac{x_i^r - 1}{x_i - 1} = \\ &= (1 - x_i^r x_{i+1} x_i^{-r})(1 + x_i + \dots + x_i^{r-1}). \end{aligned}$$

Вычисляем производную от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменной  $x_{i+1}$ :

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial(x_i^r x_{i+1} x_i^{-r})}{\partial x_{i+1}} = x_i^r \frac{\partial(x_{i+1} x_i^{-r})}{\partial x_{i+1}} = x_i^r \left( 1 + x_{i+1} \frac{\partial(x_i^{-r})}{\partial x_{i+1}} \right) = x_i^r.$$

Аналогично находим остальные производные

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Так как  $x_j^{\sigma_i} = x_j$  при  $j \neq i, i+1$ , то все производные от  $x_j^{\sigma_i} = x_j$  по переменным  $x_i$  и  $x_{i+1}$  будут равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Таким образом, справедливы равенства

$$\frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} (1 - x_i^r x_{i+1} x_i^{-r})(1 + x_i + \dots + x_i^{r-1}) & \text{при } k = i, \\ 1 & \text{при } k = i + 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i^r & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k = i + 1. \end{cases}$$

Символом  $\xi$  обозначим гомоморфизм

$$\xi : \mathbb{Z}F_n \longrightarrow \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}],$$

посылающий  $x_i$  в  $t_i, i = 1, \dots, n-1$ . Пусть  $\beta$  – некоторая коса  $B_n$ , определяем  $\rho_l : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}), l = 1, \dots, 4$ , следующим образом

$$\rho_l(\beta) = \left( \left( \frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_j} \right)^\xi \right).$$

Чтобы отображение  $\rho_l$  являлось представлением группы  $B_n$  нужно, чтобы соотношения  $B_n$  переходили в соотношения. Соотношение коммутативности будет выполнено, так как  $\rho_l$  локальное. Остается проверить выполнение соотношения

$$\rho_l(\sigma_i)\rho_l(\sigma_{i+1})\rho_l(\sigma_i) = \rho_l(\sigma_{i+1})\rho_l(\sigma_i)\rho_l(\sigma_{i+1}). \quad (2.1)$$

Соотношение 2.1 даст дополнительные соотношения на  $t_i, i = 1, \dots, n$ , при этом мы получим представление группы кос, которое обозначим  $\rho_l$ .

Под действием гомоморфизма  $\rho_1$  получаем матрицу

$$\tilde{\rho}_1(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1-t_{i+1})(1+t_i+\dots+t_i^{r-1}) & t_i^r & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для отображения  $\rho_1$  соотношение (2.1) примет вид:

$$\rho_1(\sigma_i)\rho_1(\sigma_{i+1})\rho_1(\sigma_i) = \rho_1(\sigma_{i+1})\rho_1(\sigma_i)\rho_1(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_1(\sigma_i)\rho_1(\sigma_{i+1})\rho_1(\sigma_i) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{(1-t_i^r)^2(1-t_{i+1})^2}{(1-t_i)^2} + t_i^r \frac{(1-t_{i+1}^r)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_i^r \frac{(1-t_i^r)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^r t_{i+1}^r & 0 \\ 0 & \frac{(1-t_i^r)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^r & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 1 & & 0 \\ 0 & & 0 & & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_1(\sigma_{i+1})\rho_1(\sigma_i)\rho_1(\sigma_{i+1}) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{(1-t_i^r)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^r \frac{(1-t_{i+1}^r)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_i^r t_{i+1}^r & 0 \\ 0 & \frac{(1-t_{i+1}^r)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_{i+1}^r & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 1 & & 0 \\ 0 & & 0 & & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Приравнивая эти матрицы, получим  $t_i = t_{i+1} = t_{i+2}$ . Обозначая  $t = t_i$ , приходим к представлению  $\rho_1 : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ , заданному на порожд-

дающих следующим образом:

$$\rho_1(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 - t^r & t^r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что если положить  $q = t^r$ , то получим представление Бурау.

Вычислим производные Фокса для представления  $w_2$ . Полагаем  $w_2(\sigma_i)(x_j) = x_j^{\sigma_i}$ . Вычисляем производную от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменной  $x_i$ :

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i x_{i+1}^{-1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial(x_{i+1}^{-1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i x_{i+1}^{-1}.$$

Вычисляем производную от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменной  $x_{i+1}$ :

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial(x_i x_{i+1}^{-1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i \frac{\partial(x_{i+1}^{-1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i (-x_{i+1}^{-1}) = -x_i x_{i+1}^{-1}.$$

Остальные производные такие же, как и в предыдущем случае:

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Следовательно, получим равенства:

$$\frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i x_{i+1}^{-1} & \text{при } k = i, \\ 1 & \text{при } k = i + 1. \end{cases} \quad \frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} -x_i x_{i+1}^{-1} & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k = i + 1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма  $\rho_2$  получаем матрицу

$$\rho_2(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i t_{i+1}^{-1} & -t_i t_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Соотношение (2.1) для  $\rho_2$  примет вид:

$$\rho_2(\sigma_i) \rho_2(\sigma_{i+1}) \rho_2(\sigma_i) = \rho_2(\sigma_{i+1}) \rho_2(\sigma_i) \rho_2(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1+t_it_{i+1}^{-1})^2 - t_it_{i+1}^{-1}(1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1}) & -t_it_{i+1}^{-1}(1+t_it_{i+1}^{-1}) & t_it_{i+2}^{-1} & 0 \\ 0 & 1+t_it_{i+1}^{-1} & -t_it_{i+1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1}) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1+t_it_{i+1}^{-1} & -t_it_{i+1}^{-1}(1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1}) & t_it_{i+2}^{-1} & 0 \\ 0 & 1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1} & -t_{i+1}t_{i+2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Приравнивая эти матрицы, получим, что  $t_it_{i+1}^{-1} = t_{i+1}t_{i+2}^{-1}$ . Полагая  $t = -t_it_{i+1}^{-1}$ , приходим к представлению  $\rho_2 : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ :

$$\rho_2(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что  $\rho_2$  совпадает представлением Бурау.

Разберем представление  $\rho_4$  и покажем, что представление  $\rho_3$  сводится к нему. Вычислим производные Фокса для представления  $w_4$ . Полагаем  $w_4(\sigma_i)(x_j) = x_j^{\sigma_i}$ . Производные от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменным  $x_i$  и  $x_{i+1}$ :

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i x_{i+1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial(x_{i+1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i x_{i+1}.$$

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial(x_i x_{i+1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i \frac{\partial(x_{i+1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i.$$

Производные от  $x_{i+1}^{\sigma_i}$  по переменным  $x_i$  и  $x_{i+1}$ :

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i^{-1})}{\partial x_i} = -x_i^{-1}, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial(x_i^{-1})}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Следовательно, получим равенства

$$\frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i x_{i+1} & \text{при } k = i, \\ -x_i^{-1} & \text{при } k = i + 1. \end{cases} \quad \frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i & \text{при } k = i, \\ 0 & \text{при } k = i + 1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма  $\rho_4$  получаем матрицу

$$\tilde{\rho}_4(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i t_{i+1} & t_i & 0 \\ 0 & -t_i^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Соотношение (2.1) для  $\rho_4$  примет вид:

$$\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i) = \rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1 + t_i t_{i+1})^2 - (1 + t_{i+1} t_{i+2}) & t_i(1 + t_i t_{i+1}) & t_i t_{i+1} & 0 \\ 0 & -t_i^{-1}(1 + t_i t_{i+1}) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i^{-1} t_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1}) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i t_{i+1} & t_i(1 + t_{i+1} t_{i+2}) & t_i t_{i+1} & 0 \\ 0 & -t_i^{-1}(1 + t_{i+1} t_{i+2}) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i^{-1} t_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right).$$

Приравнивая эти матрицы, получаем  $t_i t_{i+1} = t_{i+1} t_{i+2} = 1$ . Таким образом, получаем представление  $\rho_4 : B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$

$$\rho_4(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & t_i & 0 \\ 0 & -t_i^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Хотя представление  $\rho_4$  не является однородным, тем не менее покажем, что найдется новый базис, в котором представление  $\rho_4$  будет однородным.

Пусть  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  – векторное пространство над  $\mathbb{C}$  с базисом  $e_1, \dots, e_n$ . Действуем  $\rho_4(\sigma_i)$  на базисные вектора, получаем:

$$\rho_4(\sigma_i) : \begin{cases} e_i \longrightarrow 2e_i - t_i^{-1}e_{i+1}, \\ e_{i+1} \longrightarrow t_i e_i, \\ e_j \longrightarrow e_j \quad \text{при } j \neq i, i+1 \end{cases}$$

Выберем новый базис  $f = (f_1, \dots, f_n)$  следующим образом:

$$f = \left( x_1 e_1, x_2 e_2, \dots, x_n e_n \right).$$

Тогда базис  $e$  выражается через базис  $f$ :

$$e = \left( \frac{f_1}{x_1}, \frac{f_2}{x_2}, \dots, \frac{f_n}{x_n} \right).$$

Действуем образом  $\sigma_i$  на базис  $f$ , имеем

$$\rho_4(\sigma_i) : \begin{cases} f_i = x_i e_i \longrightarrow 2f_i - t_i^{-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} f_{i+1}, \\ f_{i+1} = x_{i+1} e_{i+1} \longrightarrow t_i \frac{x_{i+1}}{x_i} f_i, \\ f_j = x_j e_j \longrightarrow f_j \quad \text{при } j \neq i, i+1 \end{cases}$$

Выбирая коэффициенты матрицы перехода  $T$  так, чтобы выполнялось равенство

$$-t_i^{-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Получаем соотношения на коэффициенты

$$x_{i+1} = -t_i^{-1}x_i.$$

Последовательно выражаем каждый  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , через  $x_1$ , имеем

$$x_i = (-1)^{i-1}t_{i-1}^{-1}t_{i-2}^{-1}\dots t_1x_1.$$

Получаем диагональную матрицу перехода  $T$  от базиса  $e$  к базису  $f = eT$

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t_1^{-1}x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_2t_1x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1}t_{n-1}t_{n-2}\dots t_2t_1x_1 \end{pmatrix}.$$

В получившемся базисе матрица представления  $\rho_4$  будет выглядеть следующим образом:

$$[\rho_4(\sigma_i)]_f = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, получается представление Бурау при  $t = -1$ .

Вычислим производные Фокса для представления  $w_3$ . Полагаем  $w_3(\sigma_i)(x_j) = x_j^{\sigma_i}$ . Производные от  $x_i^{\sigma_i}$  по переменным  $x_i$  и  $x_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} &= \frac{\partial(x_i^2x_{i+1})}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial(x_ix_{i+1})}{\partial x_i} = 1 + x_i. \\ \frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} &= \frac{\partial(x_i^2x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} = x_i^2. \end{aligned}$$

Производные от  $x_{i+1}^{\sigma_i}$  по переменным  $x_i$  и  $x_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} &= \frac{\partial(x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}x_{i+1})}{\partial x_i} = x_{i+1}^{-1}(-x_i^{-1}) = -x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}. \\ \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} &= \frac{\partial(x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} = -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1} \frac{\partial(x_i^{-1}x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} = -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i & \text{при } k = i, \\ -x_{i+1}^{-1}x_i^{-1} & \text{при } k = i + 1. \end{cases} \quad \frac{\partial x_k^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i^2 & \text{при } k = i, \\ -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1}x_i^{-1} & \text{при } k = i + 1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма  $\rho_3$  получаем матрицу

$$\rho_3(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i & t_i^2 & 0 \\ 0 & -t_{i+1}^{-1}t_i^{-1} & -t_{i+1}^{-1} + t_{i+1}^{-1}t_i^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Из соотношения

$$\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i) = \rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1})$$

получаем  $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = 1$ . Таким образом,

$$\rho_3(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что представление  $\rho_3$  является частным случаем представления  $\rho_4$  при  $t_i = 1$ . □

## Глава 3. Группы узлов и зацеплений

### 3.1. Группы виртуальных зацеплений

*Диаграммой виртуального зацепления* называется регулярная проекция зацепления на плоскость, в которой каждая двойная точка снабжена дополнительной информацией: является ли она классическим перекрестком или виртуальным [22] (см. рис. 3.1).

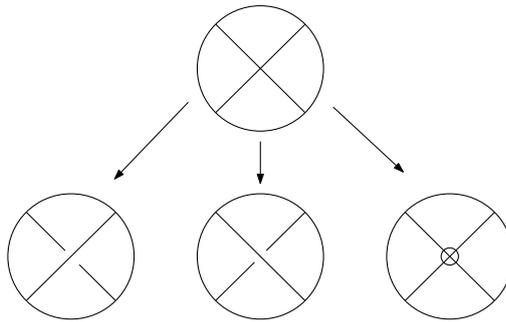


Рис. 3.1. Двойная точка виртуального узла

*Виртуальное зацепление* – это класс эквивалентности виртуальных диаграмм относительно обобщенных преобразований Райдемайстера (см. рис. 3.2). Так же как для классических зацеплений, основная проблема теории виртуальных зацеплений – классификация виртуальных зацеплений.

Отметим, что в отличие от классических зацеплений, виртуальное зацепление является комбинаторным (но не топологическим) объектом. Связь между виртуальными зацеплениями и виртуальными косами полностью задается аналогами теорем Александера и Маркова [20,23,26]. Аналог теоремы Александера утверждает, что любое виртуальное зацепление можно представить в виде замыкания виртуальной косы. *Замыканием косы  $\beta$*  называется зацепление, обозначаемое  $\widehat{\beta}$ , которое получается из  $\beta$ , если соединить концы нитей незацепленными кривыми (см. рис. 3.3).

Для классического зацепления определяется группа зацепления. Возникает естественный вопрос об определении группы виртуального зацепле-

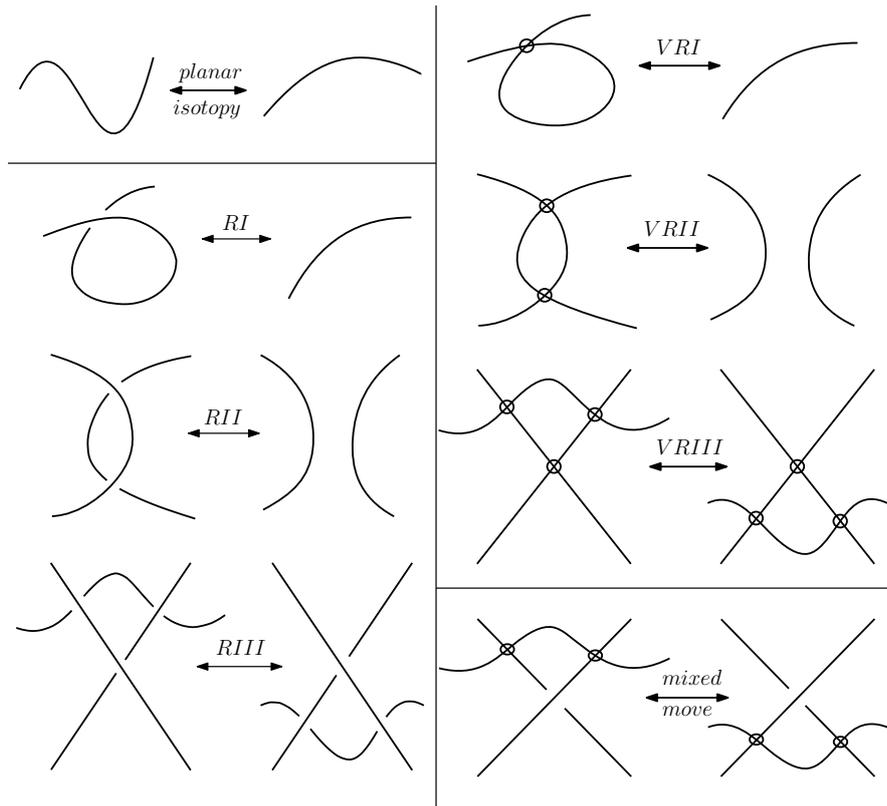
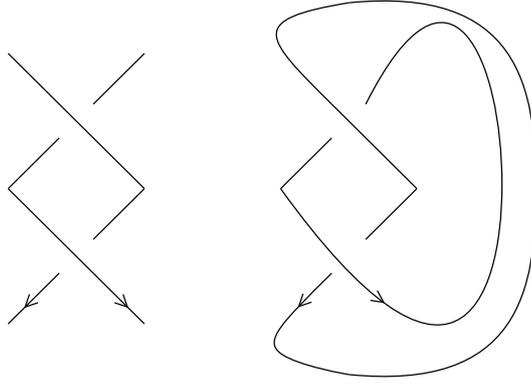


Рис. 3.2. Обобщенные преобразования Райдемайстера

ния. Первым такую группу определил Кауффман [22]. Однако его группа не отличает виртуальный трилистник от тривиального узла.

Для нахождения генетического кода группы зацепления можно использовать два подхода. Первый подход — подход Виртингера, когда по диаграмме находятся порождающие и соотношения группы зацепления. Второй подход основан на представлении зацепления в виде замкнутой косы и гомоморфизме группы кос в группу автоморфизмов некоторой группы. Оба эти подхода описаны в книге [10] для классических зацеплений и в работе [9] для виртуальных зацеплений. В настоящем параграфе дадим новое определение группы виртуального зацепления. При этом мы используем два подхода: вначале определим группу при помощи представления  $\varphi_M : VB_n \longrightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$  (косовый подход), затем при помощи виртуальной диаграммы. Далее покажем, что оба эти определения эквивалентны.

Рис. 3.3. Замыкание косы  $\sigma^2$ 

### 3.1.1. Косовый подход

Опишем общий подход, позволяющий по представлению группы виртуальных кос автоморфизмами некоторой группы строить инварианты зацеплений. Предположим, что у нас есть представление  $\varphi : VB_n \rightarrow \text{Aut}(H)$  группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы  $H = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \mid \mathcal{R} \rangle$ , где  $\mathcal{R}$  – соотношения группы  $H$ . Сопоставим виртуальной косе  $\beta \in VB_n$  следующую группу

$$G_\varphi(\beta) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \mid \mathcal{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i), i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группа  $G_\varphi(\beta)$  будет инвариантом виртуального зацепления  $\widehat{\beta}$ , если доказать, что для любой другой косы  $\beta'$  такой, что зацепления  $\widehat{\beta}$  и  $\widehat{\beta}'$  эквивалентны, группа  $G_\varphi(\beta)$  изоморфна группе  $G_\varphi(\beta')$ .

Используем этот подход для определенного ранее представления  $\widetilde{\varphi}_M$ . Пусть коса  $\beta \in VB_n$ . Положим

$$G_{\widetilde{M}}(\beta) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, v_1, v_2, \dots, v_n \mid [v_i, v_j] = 1, \\ y_i = \widetilde{\varphi}_M(\beta)(y_i), v_i = \widetilde{\varphi}_M(\beta)(v_i), i, j = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Покажем, что так определенная группа является инвариантом зацепления. Более точно, справедлива

**ТЕОРЕМА 6** Пусть  $\beta \in VB_n$  и  $\beta' \in VB_m$  – две виртуальных косы, замыкания которых определяют одно и то же зацепление  $L$ . Тогда  $G_{\widetilde{M}}(\beta) \cong$

$G_{\widetilde{M}}(\beta')$ , т. е. группа  $G_{\widetilde{M}}(\beta)$  является инвариантом зацепления  $L = \widehat{\beta}$  и мы будем обозначать ее символом  $G_{\widetilde{M}}(L)$ .

**Доказательство.** Аналог теоремы Маркова для виртуальных кос доказал Камада [20]. Кауффман и Ламбропулоу [23] сформулировали эту теорему в виде более удобном для проверки. По этой теореме два ориентированных виртуальных зацепления эквивалентны тогда и только тогда, когда две соответствующие виртуальные косы связаны конечной последовательностью следующих преобразований или обратных к ним:

1) сопряжение в группе виртуальных кос

$$\beta \rightarrow \rho_k \beta \rho_k, \quad \beta \rightarrow \sigma_k \beta \sigma_k^{-1},$$

2) правая виртуальная и классическая стабилизация

$$\beta \rightarrow \beta \rho_n, \quad \beta \rightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1},$$

3) правое прошивание сверху (снизу)

$$\beta \rightarrow \beta \sigma_n^{\pm 1} \rho_{n-1} \sigma_n^{\mp 1},$$

4) левое прошивание сверху (снизу)

$$\beta \rightarrow \beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{\mp 1} \rho_n \sigma_{n-1}^{\pm 1} \rho_{n-1} \rho_n,$$

где  $\beta, \rho_k, \sigma_k \in VB_n$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , а  $\rho_n, \sigma_n \in VB_{n+1}$ .

Нужно проверить, что при действии любого из преобразований 1) – 4) или обратных к нему полученная группа будет изоморфна группе  $G_{\widetilde{M}}(\beta)$ .

Для простоты обозначений будем писать вместо  $\widetilde{\varphi}_M(\beta)$  символ  $\beta$  и автоморфизмы - справа от аргументов. Обозначим символом  $G_1$  группу построенную по косе  $\beta$ , т. е.

$$G_1 = G_{\widetilde{M}}(\beta) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, v_1, v_2, \dots, v_n \mid [v_i, v_j] = 1, \\ y_i = y_i \beta, \quad v_i = v_i \beta, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

1) Рассматриваем сопряжения косы  $\beta$  в группе  $VB_n$ . При сопряжении порождающим  $\sigma_k^{-1}$  получим группу

$$G_2 = G_{\widetilde{M}}(\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}) = \langle y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n \mid [v_i, v_j] = 1, \\ y_i = y_i(\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}), v_i = v_i(\sigma_k \beta \sigma_k^{-1}), i, j = 1, 2, \dots, n \rangle,$$

где  $k \in 1, 2, \dots, n-1$ . Для того, чтобы доказать, что  $G_2 \cong G_1$ , перепишем определяющие соотношения  $G_2$  в форме

$$y_i \sigma_k = y_i(\sigma_k \beta), \quad v_i \sigma_k = v_i(\sigma_k \beta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если  $i \neq k, k+1$ , то ввиду равенств  $y_i \sigma_k = y_i$  и  $v_i \sigma_k = v_i$  эти соотношения эквивалентны соответственно

$$y_i = y_i \beta, \quad v_i = v_i \beta,$$

которые являются соотношениями в  $G_1$ . Следовательно, нужно рассмотреть только четыре соотношения:

$$\begin{aligned} y_k \sigma_k &= y_k(\sigma_k \beta), & y_{k+1} \sigma_k &= y_{k+1}(\sigma_k \beta), \\ v_k \sigma_k &= v_k(\sigma_k \beta), & v_{k+1} \sigma_k &= v_{k+1}(\sigma_k \beta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

По определению  $\widetilde{\varphi}_M$  соотношения (3.1) эквивалентны следующим

$$\begin{aligned} y_k y_{k+1} y_k^{-1} &= (y_k y_{k+1} y_k^{-1}) \beta, & y_k &= y_k \beta, \\ v_{k+1} &= v_{k+1} \beta, & v_k &= v_k \beta. \end{aligned}$$

Видим, что второе, третье и четвертое соотношения это соотношения из  $G_1$ .

Перепишем первое соотношение:

$$y_k y_{k+1} y_k^{-1} = (y_k \beta)(y_{k+1} \beta)(y_k^{-1} \beta)$$

Используя второе соотношение, получаем соотношение

$$y_{k+1} = y_{k+1} \beta,$$

т. е, которое является соотношением из  $G_1$ . Таким образом, мы доказали, что используя преобразования Титце, можно перейти от группы  $G_2$  к группе  $G_1$ , а потому эти группы изоморфны.

Рассмотрим сопряжение элементом  $\rho_k$ . В этом случае имеем

$$G_2 = G_{\widetilde{M}}(\rho_k \beta \rho_k) = \langle y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n \mid [v_i, v_j] = 1, \\ y_i = y_i(\rho_k \beta \rho_k), v_i = v_i(\rho_k \beta \rho_k), i, j = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Перепишем определяющие соотношения  $G_2$  в форме

$$y_i \rho_k = y_i(\rho_k \beta), v_i \rho_k = v_i(\rho_k \beta), i = 1, 2, \dots, n.$$

Если  $i \neq k, k + 1$ , то имеем

$$y_i = y_i \beta, v_i = v_i \beta,$$

так как  $y_i \rho_k = y_i$  и  $v_i \rho_k = v_i$ . Это соотношения в группе  $G_1$ . Следовательно, нужно рассмотреть только четыре соотношения:

$$y_k \rho_k = y_k(\rho_k \beta), \quad y_{k+1} \rho_k = y_{k+1}(\rho_k \beta), \\ v_k \rho_k = v_k(\rho_k \beta), \quad v_{k+1} \rho_k = v_{k+1}(\rho_k \beta).$$

Эти соотношения эквивалентны следующим

$$y_{k+1}^{v_k^{-1}} = y_{k+1}^{v_k^{-1}} \beta, \quad y_k^{v_{k+1}} = y_k^{v_{k+1}} \beta, \\ v_{k+1} = v_{k+1} \beta, \quad v_k = v_k \beta.$$

Нетрудно видеть, что мы приходим к соотношениям в  $G_1$ . Таким образом, мы доказали, что  $G_2$  изоморфна  $G_1$ .

2) Рассмотрим преобразование, переводящее косу  $\beta \in VB_n$  в косу  $\beta \sigma_n^{-1} \in VB_{n+1}$ . Имеем

$$G_2 = G_{\widetilde{M}}(\beta \sigma_n^{-1}) = \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid [v_i, v_j] = 1, \\ y_i = y_i(\beta \sigma_n^{-1}), v_i = v_i(\beta \sigma_n^{-1}), i, j = 1, 2, \dots, n + 1 \rangle,$$

и нам необходимо доказать, что  $G_2 \cong G_1$ . Перепишем соотношения  $G_2$  в форме

$$y_i \sigma_n = y_i \beta, \quad v_i \sigma_n = v_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

По тем же соображениям, что и в пункте 1) достаточно рассмотреть только четыре соотношения:

$$\begin{aligned} y_n \sigma_n &= y_n \beta, & y_{n+1} \sigma_n &= y_{n+1} \beta \\ v_n \sigma_n &= v_n \beta, & v_{n+1} \sigma_n &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \tag{3.2}$$

По определению  $\varphi_{\widetilde{M}}$  соотношения (3.2) эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} y_n y_{n+1} y_n^{-1} &= y_n \beta, & y_n &= y_{n+1}, \\ v_{n+1} &= v_n \beta, & v_n &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

Используя второе соотношение, переписываем первое соотношение в виде

$$y_n = y_n \beta,$$

а это соотношение в  $G_1$ . Используя соотношения  $y_{n+1} = y_n$ ,  $v_{n+1} = v_n$ , можем исключить  $y_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  из множества порождающих группы  $G_2$ . Таким образом, доказано, что группа  $G_2$  изоморфна группе  $G_1$ .

Преобразование, переводящее косу  $\beta \in VB_n$  в косу  $\beta \sigma_n \in VB_{n+1}$  разбирается аналогично.

Рассмотрим преобразование, переводящее косу  $\beta \in VB_n$  в косу  $\beta \rho_n \in VB_{n+1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} G_2 &= G_{\widehat{M}}(\beta \rho_n) = \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid [v_i, v_j] = 1, \\ & \quad y_i = y_i(\beta \rho_n), \quad v_i = v_i(\beta \rho_n), \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \rangle. \end{aligned}$$

Для  $i = n$  и  $i = n+1$  имеем следующие соотношения в  $G_2$ :

$$\begin{aligned} y_n \rho_n &= y_n \beta, & y_{n+1} \rho_n &= y_{n+1} \beta \\ v_n \rho_n &= v_n \beta, & v_{n+1} \rho_n &= v_{n+1} \beta, \end{aligned}$$

которые эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{v_n^{-1}} &= y_n \beta, & y_n^{v_{n+1}} &= y_{n+1} \beta = y_{n+1}, \\ v_{n+1} &= v_n \beta, & v_n &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставляя  $y_{n+1}$  из второго в первое соотношение, получаем

$$y_n = y_n \beta,$$

т. е. соотношение в  $G_1$ . Используя второе и четвертое соотношения, можем исключить  $y_{n+1}, v_{n+1}$  из множества порождающих группы  $G_2$ . Таким образом, мы доказали, что группа  $G_2$  изоморфна группе  $G_1$ .

3) Рассмотрим правое прошивание сверху, т. е. преобразование косы  $\beta \in VB_n$  в косу  $\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} \in VB_{n+1}$ . Получаем

$$\begin{aligned} G_2 &= G_{\widetilde{M}}(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \mid [v_i, v_j] = 1, \\ & y_i = y_i(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}), \quad v_i = v_i(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \rangle. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что  $G_1 \cong G_2$ , перепишем соотношения  $G_2$  в форме

$$y_i \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} = y_i \beta, \quad v_i \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1} = v_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Если  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , то имеем

$$y_i = y_i \beta, \quad v_i = v_i \beta,$$

а это соотношения в  $G_1$ . Следовательно, нужно рассмотреть только шесть соотношений:

$$\begin{aligned} y_{n-1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_{n-1} \beta, & y_n(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_n \beta, & y_{n+1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_{n-1} \beta, & v_n(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_n \beta, & v_{n+1}(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

По определению  $\widetilde{\varphi}_M$  коса  $\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}$  действует на порождающие  $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}$  следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}_M(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) : \begin{cases} y_{n-1} \longmapsto y_{n+1}^{v_{n-1}^{-1}}, \\ y_n \longmapsto y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-1} y_n y_{n+1} y_{n-1}^{-v_{n+1}}, \\ y_{n+1} \longmapsto y_{n-1}^{v_{n+1}}. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\tilde{\varphi}_M(\sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) : \begin{cases} v_{n-1} \mapsto v_{n+1}, \\ v_n \mapsto v_n, \\ v_{n+1} \mapsto v_{n-1}. \end{cases}$$

Таким образом, соотношения (3.3) для представления  $\tilde{\varphi}_M$  эквивалентны соотношениям

$$y_{n+1}^{v_{n-1}^{-1}} = y_{n-1}\beta, \quad y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-1} y_n y_{n+1} y_{n-1}^{-v_{n+1}} = y_n \beta, \quad y_{n-1}^{v_{n+1}} = y_{n+1} \beta, \\ v_{n+1} = v_{n-1} \beta, \quad v_n = v_n \beta, \quad v_{n-1} = v_{n+1} \beta.$$

Так как  $\beta \in VB_n$ , то на порождающие  $y_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  она действует тривиально, т. е.  $y_{n+1}\beta = y_{n+1}$ ,  $v_{n+1}\beta = v_{n+1}$ . Следовательно, третье и шестое соотношения эквивалентны соответственно

$$y_{n-1}^{v_{n+1}} = y_{n+1}, \quad v_{n-1} = v_{n+1}.$$

Подставляем третье соотношение в первое, с учетом шестого соотношения имеем

$$y_{n-1} = y_{n-1} \beta,$$

т. е. соотношение в  $G_1$ . Используя третье соотношение, получаем, что второе соотношение эквивалентно

$$y_n = y_n \beta,$$

т. е. соотношение в  $G_1$ . Также мы можем исключить  $y_{n+1}$  и  $v_{n+1}$  из множества порождающих группы  $G_2$ . Таким образом, мы доказали, что множество соотношений из  $G_2$  эквивалентно множеству соотношений из  $G_1$ .

4) Рассмотрим левое прошивание сверху, т. е. преобразование косы  $\beta \in VB_n$  в косу  $\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n \in VB_{n+1}$ . Получаем группы  $G_1$  и

$$G_2 = G(\beta \sigma_n \rho_{n-1} \sigma_n^{-1}) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \parallel$$

$$y_i = y_i(\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n), \quad v_i = v_i(\beta \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n), \\ [v_i, v_j] = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1 \rangle.$$

Чтобы доказать, что  $G_1 \cong G_2$ , перепишем соотношения  $G_2$  в виде

$$\begin{aligned} y_i \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n &= y_i \beta, \\ v_i \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n &= v_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , то имеем

$$y_i = y_i \beta, \quad v_i = v_i \beta,$$

что является соотношениями в  $G_1$ . Следовательно, нужно рассмотреть только шесть соотношений:

$$\begin{aligned} y_{n-1}(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_{n-1} \beta, \\ y_n(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_n \beta, \\ y_{n+1}(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1}(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_{n-1} \beta, \\ v_n(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_n \beta, \\ v_{n+1}(\rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n) &= v_{n+1} \beta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что коса  $b = \rho_n \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \rho_n$  действует на порождающие  $y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}$  следующим образом:

$$b : \begin{cases} y_{n-1} \mapsto (y_n^{-1} y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_n)^{v_n^{-1}}, \\ y_n \mapsto y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}}, \\ y_{n+1} \mapsto y_n^{v_{n+1} v_{n-1}}, \\ v_{n-1} \mapsto v_{n-1}, \\ v_n \mapsto v_{n+1}, \\ v_{n+1} \mapsto v_n. \end{cases}$$

Таким образом, соотношения (3.5) эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} (y_n^{-1} y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_{n-1}^{v_{n+1}} y_{n+1}^{-v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} y_n)^{v_n^{-1}} &= y_{n-1} \beta, \quad y_{n+1}^{v_n^{-1} v_{n-1}^{-1}} = y_n \beta, \quad y_n^{v_{n+1} v_{n-1}} = y_{n+1} \beta, \\ v_{n-1} &= v_{n-1} \beta, \quad v_{n+1} = v_n \beta, \quad v_n = v_{n+1} \beta. \end{aligned}$$

Так как  $\beta \in VB_n$ , то на порождающие  $y_{n+1}, v_{n+1}$  она действует тривиально. Следовательно, третье соотношение эквивалентно соотношению

$$y_n^{v_{n+1}v_{n-1}} = y_{n+1},$$

а шестое соотношение эквивалентно соотношению

$$v_n = v_{n+1}.$$

Получившиеся равенства подставляем в первое и второе соотношения и получаем после сокращений соотношения

$$y_{n-1} = y_{n-1}\beta, \quad y_n = y_n\beta,$$

которые являются соотношениями в  $G_1$ . Также мы можем исключить  $y_{n+1}, v_{n+1}$  из множества порождающих группы  $G_2$ . Таким образом, мы доказали, что множество соотношений из  $G_2$  эквивалентно множеству соотношений из  $G_1$ .

Анализ обратных преобразований проводится аналогично.  $\square$

Для представления  $\varphi_M$  определим группу виртуального зацепления.

Пусть коса  $\beta \in VB_n$ . Положим

$$\begin{aligned} G_M(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, v_0, v_1, \dots, v_n \mid \\ [u_i, u_j] = [v_k, v_l] = [u_i, v_k] = 1, \quad x_i = \varphi_M(\beta)(x_i), \quad u_i = \varphi_M(\beta)(u_i), \\ v_k = \varphi_M(\beta)(v_k), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k, l = 0, 1, \dots, n \rangle. \end{aligned}$$

Справедлива

**ТЕОРЕМА 7** Пусть  $\beta \in VB_n$  и  $\beta' \in VB_m$  – две виртуальных косы, замыкания которых определяют одно и то же зацепление  $L$ . Тогда  $G_M(\beta) \cong G_M(\beta')$ , т. е. группа  $G_M(\beta)$  является инвариантом зацепления  $L$ , и мы будем обозначать ее символом  $G_M(L)$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 6.  $\square$

### 3.1.2. Диаграммный подход

Пусть  $D_L$  – диаграмма виртуального  $d$ -компонентного зацепления  $L$ . Каждой дуге диаграммы от одного перекрестка до другого (классического или виртуального) сопоставим свой порождающий. Получим некоторое множество порождающих  $a, b, c, \dots$ . Далее занумеруем все компоненты зацепления  $L$  числами от 1 до  $d$  и сопоставим  $i$ -й компоненте два порождающих:  $u_i$  и  $v_i$ . Добавим еще один порождающий  $v_0$ .

Группой диаграммы  $D_L$  назовем группу, порожденную элементами  $a, b, c, \dots, u_i, v_0, v_i, i = 1, \dots, d$ , и определяемую следующей системой соотношений. Каждому перекрестку соответствует пара соотношений (см. рис. 3.4, 3.5). Кроме того, все элементы  $u_i, v_j$  попарно перестановочны, и груп-

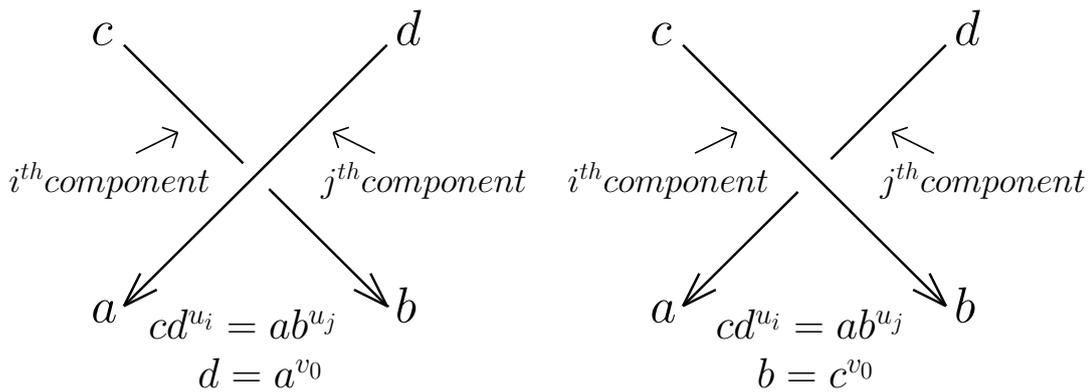


Рис. 3.4. Соотношения в классических перекрестках группы  $G_D$

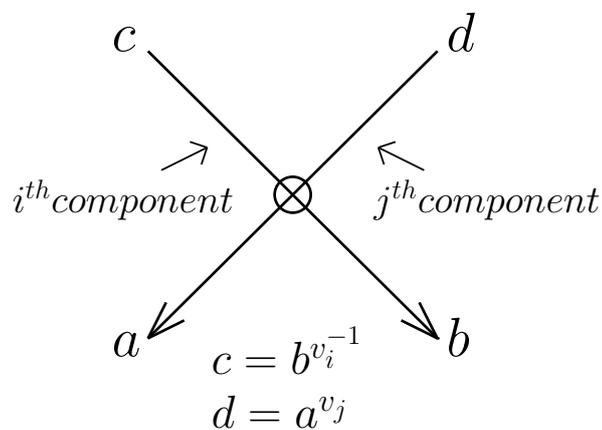


Рис. 3.5. Соотношения в виртуальном перекрестке группы  $G_D$

па  $\langle u_1, \dots, u_d, v_0, v_1, \dots, v_d \rangle$  – свободная абелева ранга  $2d + 1$ . Обозначим полученную группу символом  $G_D(D_L)$ . Если  $D'_L$  – другая диаграмма виртуального зацепления  $L$ , то от  $D_L$  можно перейти к  $D'_L$  при помощи конечного числа обобщенных преобразований Райдемайстера и плоской изотопии. Также как в классическом случае может быть доказано

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8** *Если  $D_L$  и  $D'_L$  – две диаграммы виртуального зацепления  $L$ , то группы  $G_D(D_L)$  и  $G_D(D'_L)$  изоморфны. Следовательно,  $G_D(D_L)$  является инвариантом зацепления  $L$ , а потому будем обозначать ее символом  $G_D(L)$ .*

Покажем, что группа виртуального зацепления  $L$ , построенная по косе изоморфна группе, построенной по диаграмме. Более точно, справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9** *Пусть  $L$  – виртуальное зацепление,  $D_L$  – его диаграмма,  $\beta$  – такая виртуальная коса, что ее замыкание  $\widehat{\beta}$  эквивалентно  $L$ . Тогда группа  $G_D(D_L)$  изоморфна группе  $G_M(\beta)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\beta$  – виртуальная коса из группы  $VB_n$  для некоторого  $n$ . Будем рассматривать  $\beta$  как слово в алфавите  $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}\}$ . Каждый порождающий  $\sigma_i^{\pm 1}$  и  $\rho_i$  имеет геометрическую интерпретацию и может быть представлен своей диаграммой. Поэтому коса  $\beta$  может быть представлена диаграммой, которая разбита на слои и в каждом слое есть только один перекресток: классический или виртуальный. Классическому перекрестку соответствует порождающий  $\sigma_i^{\pm 1}$ , виртуальному перекрестку соответствует порождающий  $\rho_i$ . Если коса  $\beta$  является словом длины  $m$  в группе  $VB_n$ , то ее диаграмма содержит  $m$  слоев. Рассмотрим первый слой. Он состоит из  $n$  дуг. Средняя линия слоя разобьет эти дуги пополам. Сопоставим начальным половинам дуг символы  $x_{1,j}, u_{1,j}, v_{1,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Следующим частям дуг, идущим до половины второго слоя сопоставим символы  $x_{2,j}, u_{2,j}, v_{2,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Продолжая этот процесс, разобьем диаграмму косы  $\beta$  на  $n(m + 1)$  дуг.

Будем двигаться по косе снизу вверх, т. е. читать слово  $\beta$  справа на лево. Пусть  $k$ -й слой диаграммы содержит классический перекресток (см. рис. 3.6), соответствующий элементарной косе  $\sigma_i$ . В этом слое имеется два

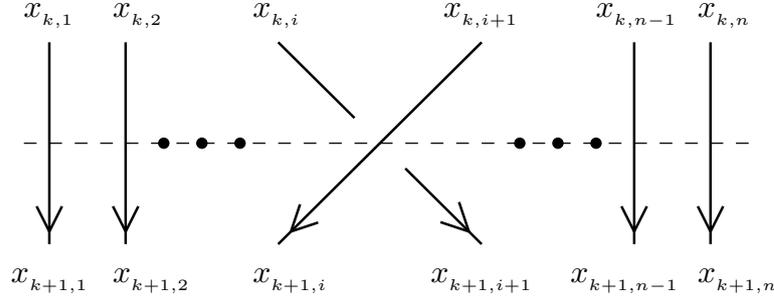


Рис. 3.6. Классический положительный перекресток

набора дуг, которым соответствуют символы  $x_{kj}$ ,  $u_{kj}$ ,  $v_{kj}$  и  $x_{k+1,j}$ ,  $u_{k+1,j}$ ,  $v_{k+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

В соответствии с формулами теоремы 1, косе  $\sigma_i$  отвечает автоморфизм

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_{k+1,i} \mapsto x_{k,i} x_{k,i+1}^{u_{ki}} x_{k,i}^{-v_0 u_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,i+1} \mapsto x_{k,i}^{v_0}, \\ x_{k+1,j} \mapsto x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} \mapsto u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} \mapsto u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} \mapsto u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} \mapsto v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} \mapsto v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} \mapsto v_{k,j}, \end{cases}$$

где  $j \neq i, i+1$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $k$ -му слою соответствует элементарная коса  $\sigma_i^{-1}$ .

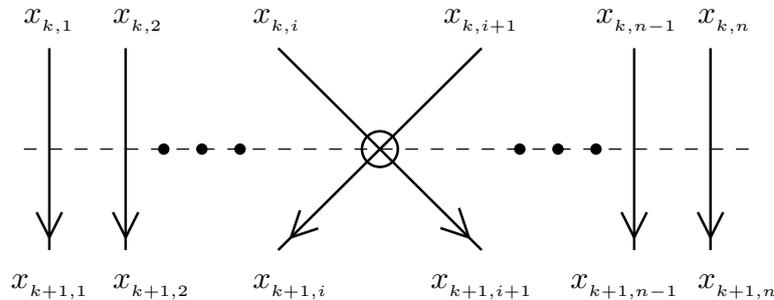


Рис. 3.7. Виртуальный перекресток

Если  $k$ -му слою соответствует виртуальный порождающий  $\rho_i$  (см. рис.

3.7) то ему отвечает автоморфизм

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} x_{k+1,i} \mapsto x_{k,i+1}^{v_{ki}^{-1}}, \\ x_{k+1,i+1} \mapsto x_{k,i}^{v_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,j} \mapsto x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} \mapsto u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} \mapsto u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} \mapsto u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} \mapsto v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} \mapsto v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} \mapsto v_{k,j}, \end{cases}$$

где  $j \neq i, i+1$ .

В силу того, что в каждом слое верхние и нижние дуги склеиваются, можем написать соотношения для  $k$ -го слоя, соответствующего косе  $\sigma_i$ :

$$\begin{cases} x_{k+1,i} = x_{k,i} x_{k,i+1}^{u_{ki}} x_{k,i}^{-v_0 u_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,i+1} = x_{k,i}^{v_0}, \\ x_{k+1,j} = x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} = u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} = u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} = u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} = v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} = v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} = v_{k,j}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $j \neq i, i+1$ , для  $k$ -го слоя, соответствующего косе  $\rho_i$ :

$$\begin{cases} x_{k+1,i} = x_{k,i+1}^{v_{ki}^{-1}}, \\ x_{k+1,i+1} = x_{k,i}^{v_{k,i+1}}, \\ x_{k+1,j} = x_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} u_{k+1,i} = u_{k,i+1}, \\ u_{k+1,i+1} = u_{k,i}, \\ u_{k+1,j} = u_{k,j}, \end{cases} \begin{cases} v_{k+1,i} = v_{k,i+1}, \\ v_{k+1,i+1} = v_{k,i}, \\ v_{k+1,j} = v_{k,j}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $j \neq i, i+1$ . Также выполняются соотношения коммутативности:

$$[u_{kl}, u_{pq}] = [u_{kl}, v_{pq}] = [v_{kl}, v_{pq}] = [u_{kl}, v_0] = [v_{kl}, v_0] = 1, \quad (3.8)$$

где  $k, p = 1, \dots, m+1$ ,  $l, q = 1, \dots, n$ .

Используя эти соотношения, движемся по косе снизу вверх, выражая из  $m$ -го слоя порождающие  $x_{m+1,j}$ ,  $u_{m+1,j}$ ,  $v_{m+1,j}$ , через порождающие  $x_{m,j}$ ,  $u_{m,j}$ ,  $v_{m,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Далее, рассматривая  $(m-1)$ -й слой, выразим порождающие  $x_{m+1,j}$ ,  $u_{m+1,j}$ ,  $v_{m+1,j}$ , через порождающие  $x_{m-1,j}$ ,  $u_{m-1,j}$ ,  $v_{m-1,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , и т. д. Дойдя до первого слоя, выразим порождающие  $x_{m+1,j}$ ,  $u_{m+1,j}$ ,  $v_{m+1,j}$ , через порождающие  $x_{1,j}$ ,  $u_{1,j}$ ,  $v_{1,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Чтобы перейти к замкнутой косе  $\widehat{\beta}$ , соединим начальные дуги диаграммы  $\beta$  с конечными дугами этой диаграммы, т. е. дополним соотношения (3.6) – (3.8) следующими соотношениями

$$x_{m+1,j} = x_{1,j}, \quad u_{m+1,j} = u_{1,j}, \quad v_{m+1,j} = v_{1,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

В силу соотношений (3.6), (3.7), (3.9) буквы  $u_{k,l}$ ,  $v_{k,l}$ , соответствующие одной компоненте зацепления будут отождествлены, причем это отождествление согласовано с гомоморфизмом группы  $VB_n$  в группу подстановок  $S_n$ , т. е. если образ  $\beta$  в  $S_n$  является произведением  $d$  независимых циклов, то среди порождающих  $u_{1,l}$  (также как и среди порождающих  $v_{1,l}$ ) останутся только  $d$  различных.

Исключая промежуточные буквы  $x_{k,l}$ ,  $u_{k,l}$ ,  $v_{k,l}$ ,  $k \geq 2$ , получим соотношения

$$\varphi_M(\beta)(x_1) = x_1, \dots, \varphi_M(\beta)(x_n) = x_n,$$

$$\varphi_M(\beta)(u_1) = u_1, \dots, \varphi_M(\beta)(u_n) = u_n,$$

$$\varphi_M(\beta)(v_1) = v_1, \dots, \varphi_M(\beta)(v_n) = v_n,$$

группы виртуального зацепления, построенного по косе  $\beta$ . Здесь  $x_{1,1} = x_1$ ,  $\dots$ ,  $x_{1,n} = x_n$ ,  $u_{1,1} = u_1$ ,  $\dots$ ,  $u_{1,n} = u_n$ ,  $v_{1,1} = v_1$ ,  $\dots$ ,  $v_{1,n} = v_n$ . Таким образом, мы пришли к представлению группы  $G_M(\beta)$ .  $\square$

Непосредственно из определения группы  $G_{\widetilde{M}}$  можно извлечь

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10** *Если  $L$  – классическое  $d$ -компонентное зацепление, являющееся замыканием  $n$ -нитиевой косы, то в группе  $G_{\widetilde{M}}(L)$  среди порождающих  $v_1, v_2, \dots, v_n$  будут  $d$  различных. В частности, если  $L$  – узел, то  $v_1 = v_2 = \dots = v_n$ .*

Как мы видели ранее представление  $\widetilde{\varphi}_M$  является продолжением представления Артина. Как следствие это дает

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11** *Пусть  $L$  – классическое  $d$ -компонентное зацепление. Тогда имеет место следующий изоморфизм групп*

$$G_{\widetilde{M}}(L) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) * \mathbb{Z}^d.$$

### 3.1.3. Группы, построенные по представлениям Вады

Вада использовал построенные им представления  $w_{1,r}, w_2, w_3$  группы  $VB_n$  для определения групп классического зацепления, которые являются инвариантом зацепления [34]. Также представление  $w_{1,r}$  и соответствующие ему группы изучались в работах Нельсона, Лина и Ньюмена [25], [28]. Нельсон и Ньюмен доказали, что группа, построенная по представлению  $w_{1,2}$  определяет узлы с точностью до зеркального образа и обращения.

Мы используем представления  $W_l, l = 1, \dots, 4$ , группы  $VB_n$  для определения групп  $G_l$  виртуальных зацеплений, где в случае  $l = 1$  группа  $G_1$  обозначает  $G_{1,r}$ , а представление  $W_1$  обозначает  $W_{1,r}, r \in \mathbb{Z}, r > 0$ . При этом, будет доказано, что определенные таким образом группы являются инвариантами виртуального зацепления.

Пусть зацепление  $L$  задано замыканием косы  $\beta \in VB_n$ . Положим

$$G_l(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n \mid x_i = W_l(\beta)(x_i), \\ v_i = W_l(\beta)(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle, \quad l = 1, \dots, 4.$$

Также как и для представления  $\varphi_M$  справедлива

**ТЕОРЕМА 8** Пусть  $\beta \in VB_n$  и  $\beta' \in VB_m$  – две виртуальные косы, замыкания которых определяют одно и то же виртуальное зацепление  $L$ . Тогда  $G_l(\beta) \cong G_l(\beta')$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , т. е. группа  $G_l(\beta)$  является инвариантом виртуального зацепления  $L$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 6. □

Пусть теперь виртуальное  $d$ -компонентное зацепление  $L$  задано своей диаграммой  $D_L$ . Покажем как найти группу  $G_l(D_L)$ . Каждой дуге диаграммы от одного перекрестка до другого (классического или виртуального) сопоставим свой порождающий. Для представлений  $W_1$  и  $W_2$  дуге, проходящей сверху в классическом перекрестке, сопоставляется один порождающий, для представлений  $W_3$  и  $W_4$  в этом случае сопоставляются два порождающих. Получим некоторое множество порождающих  $a, b, c, \dots$  Далее

занумеруем все компоненты зацепления  $L$  числами от 1 до  $d$  и сопоставим  $i$ -й компоненте порождающий  $v_i$ .

Группой  $G_1(D_L)$  диаграммы  $D_L$  назовем группу, порожденную элементами  $a, b, c, \dots, v_1, \dots, v_d$  и определяемую следующей системой соотношений. Положительному перекрестку сопоставим соотношение  $c = a^r b a^{-r}$  (см. рис. 3.8 слева), отрицательному перекрестку – соотношение  $c = b^{-r} a b^r$  (см. рис. 3.8 справа), виртуальному перекрестку сопоставим пару соотношений  $c = b^{v_i^{-1}}$  и  $d = a^{v_j}$  (см. рис. 3.9).

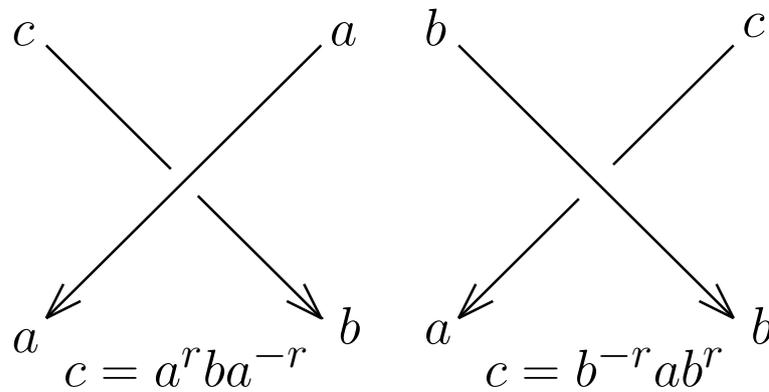


Рис. 3.8. Соотношения в классических перекрестках группы  $G_1(D_L)$

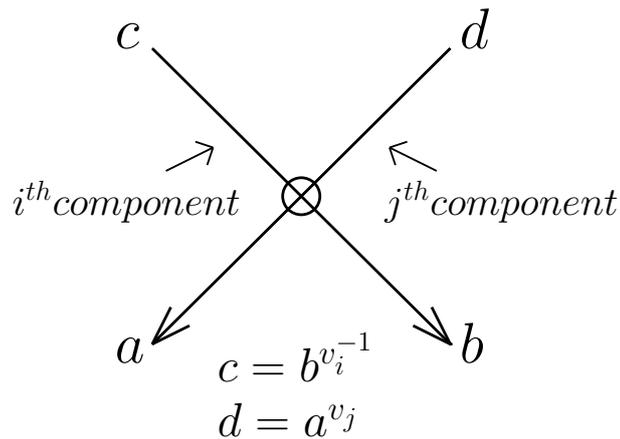


Рис. 3.9. Соотношения в виртуальном перекрестке группы  $G_1(D_L)$

Чтобы определить группу  $G_2$  положительному перекрестку сопоставим соотношение  $c = a b^{-1} a$  (см. рис. 3.10 слева), отрицательному перекрест-

ку – соотношение  $c = ba^{-1}b$  (см. рис. 3.10 справа), виртуальному перекрестку сопоставим ту же пару соотношений, что и для группы  $G_1$ .

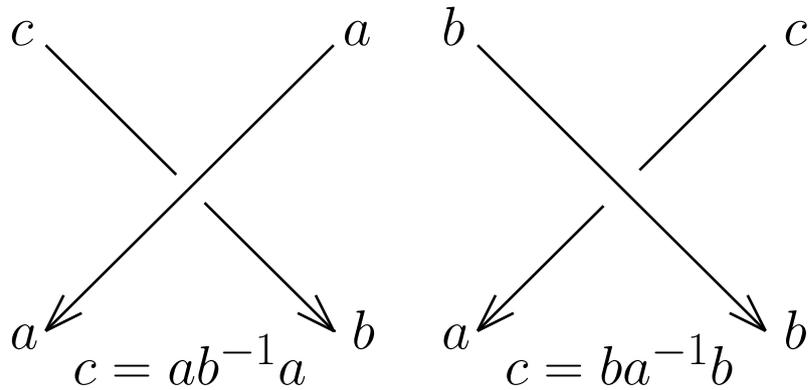


Рис. 3.10. Соотношения в классических перекрестках группы  $G_2(D_L)$

Для определения группы  $G_3$  перекрестку каждого типа сопоставим пару соотношений:  $c = a^2b$  и  $d = b^{-1}a^{-1}b$  для положительного перекрестка (см. рис. 3.11 слева), пару соотношений  $c = ab^{-1}a^{-1}$  и  $d = ab^2$  для отрицательного перекрестка (см. рис. 3.11 справа), виртуальному перекрестку сопоставим ту же пару соотношений, что и для группы  $G_1$ .

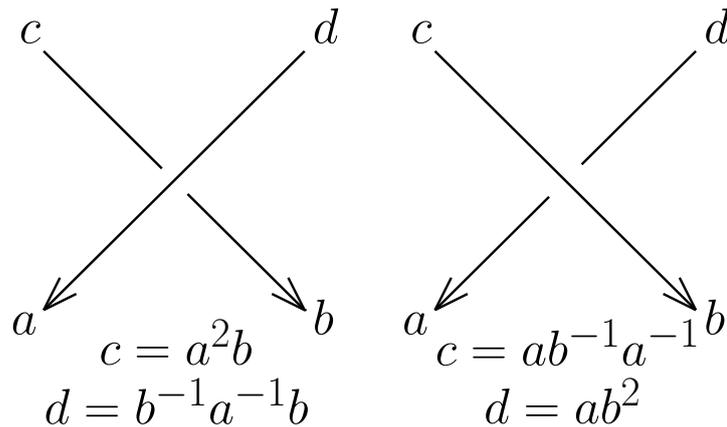


Рис. 3.11. Соотношения в классических перекрестках группы  $G_3(D_L)$

Чтобы определить группу  $G_4$  положительному перекрестку сопоставим пару соотношений:  $c = aba$  и  $d = a^{-1}$  (см. рис. 3.12 слева), отрицательному перекрестку – пару соотношений  $c = b^{-1}$  и  $d = bab$  (см. рис. 3.12

справа), виртуальному перекрестку сопоставим ту же пару соотношений, что и для группы  $G_1$ .

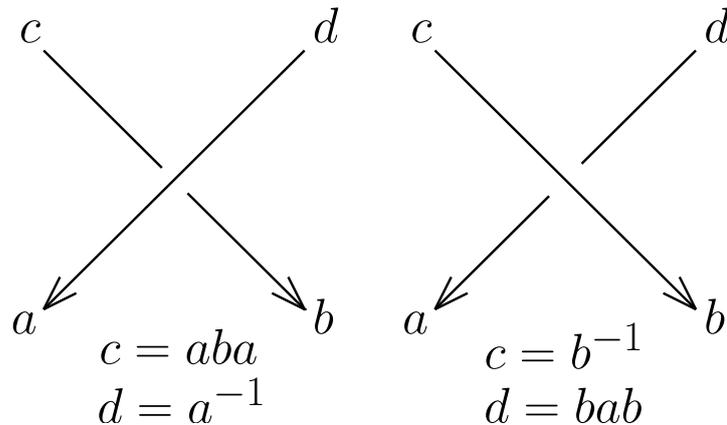


Рис. 3.12. Соотношения в классических перекрестках группы  $G_4(D_L)$

Определенные таким образом группы являются инвариантами зацепления  $L$ , т. е. справедлива

**ТЕОРЕМА 9** 1) Если  $D_L$  – диаграмма зацепления  $L = \widehat{\beta}$ , то  $G_l(D_L) \cong G_l(\beta)$ ,  $l = 1, \dots, 4$ .

2) Если  $D_L$  и  $D'_L$  две диаграммы, отвечающие виртуальному зацеплению  $L$ , то группы  $G_l(D_L)$  и  $G_l(D'_L)$  изоморфны.

**Доказательство.** Первый пункт теоремы доказывается аналогично предложению 9. Второй пункт следует из первого пункта и теоремы 8.  $\square$

### 3.2. Примеры вычисления групп зацеплений

В этом параграфе мы вычисляем группы классических зацеплений и виртуальных зацеплений, используя представления Вады,  $\varphi_M$  и  $\tilde{\varphi}_M$ .

#### 3.2.1. Группы зацеплений, построенные по представлениям Вады

В этом параграфе будем рассматривать группы, построенные по представлениям Вады  $w_1$  и  $w_2$ . Группы, построенные по представлениям  $w_3$  и  $w_4$ , для рассмотренных зацеплений будут изоморфны группам, построенным по

представлению  $w_2$ . Символом  $G_l(L)$  будем обозначать группу зацепления  $L$ , построенную по представлению  $w_l$ ,  $l = 1, 2$ .

*Тривиальный узел*  $U$  можно представить в виде замыкания косы  $\sigma_1 \in B_2$  (см. рис. 3.13). Известно, что классическая группа тривиального узла  $G(U) = \pi(S^3 - U) \cong \mathbb{Z}$ . В случае представлений Вады справедливо аналогичное утверждение, т. е.

$$G_l(U) \cong \mathbb{Z}, \quad l = 1, 2.$$

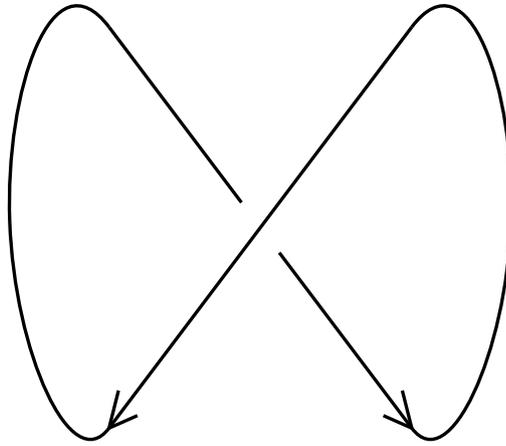


Рис. 3.13. Тривиальный узел

Действительно, автоморфизм  $w_1(\sigma_1)$  имеет вид

$$w_1(\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1^r x_2 x_1^{-r}, \\ x_2 \mapsto x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1(U) = \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1^r x_2 x_1^{-r}, x_2 = x_1 \rangle = \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Случай представления  $w_2$  разбирается аналогично.

*Зацепление Хопфа.* Напомним, что зацепление Хопфа (см. рис. 3.14) является замыканием косы  $\sigma_1^2 \in B_2$ , и классическая группа зацепления Хопфа

$$G(\sigma_1^2) = \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 = x_2 x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

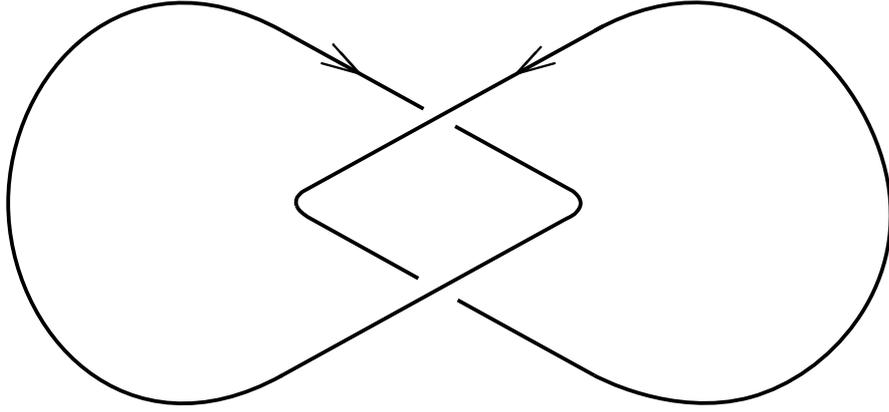


Рис. 3.14. Зацепление Хопфа

Найдем группы  $G_l(\sigma_1^2)$ ,  $l = 1, 2$ . Автоморфизм  $w_1(\sigma_1^2)$  действует следующим образом

$$w_1(\sigma_1^2) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r}, \\ x_2 \mapsto x_1^r x_2 x_1^{-r}. \end{cases}$$

Получаем группу

$$\begin{aligned} G_1(\sigma_1^2) &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r}, x_2 = x_1^r x_2 x_1^{-r} \rangle = \\ &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2^r = x_2^r x_1, x_2 x_1^r = x_1^r x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \mid [x_1, x_2^r] = [x_1^r, x_2] = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Видим, что она содержит подгруппу, изоморфную  $\mathbb{Z}^2 = \langle x_1^r, x_2^r \rangle$ .

Аutomорфизм  $w_2(\sigma_1^2)$  действует следующим образом

$$w_2(\sigma_1^2) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1, \\ x_2 \mapsto x_1 x_2^{-1} x_1. \end{cases}$$

Тогда группа зацепления Хопфа для второго представления имеет вид

$$\begin{aligned} G_2(\sigma_1^2) &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1, x_2 = x_1 x_2^{-1} x_1 \rangle = \\ &= \langle x_1, x_2 \mid (x_1 x_2^{-1})^2 = 1 \rangle = \langle x_1, t \mid t^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

где  $t = x_1 x_2^{-1}$ . Видим, что группа  $G_2(\sigma_1^2)$  изоморфна  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ , т. е. имеет кручение.

*Трилистники.* Узлы, изображенные на рис. 3.15, называются левым трилистником и правым трилистником соответственно. Обозначим левый трилистник символом  $T$ . Тогда правый трилистник является его зеркальным образом. Обозначим его символом  $\bar{T}$ . Известно, что  $T$  является замыканием косы  $\sigma_1^3 \in B_2$  и классическая группа трилистника  $G(T)$  изоморфна группе кос на 3-х нитях. Найдем группы трилистника, используя представления  $w_1$  и  $w_2$ .

Автоморфизм  $w_1(\sigma_1^3)$  действует следующим образом

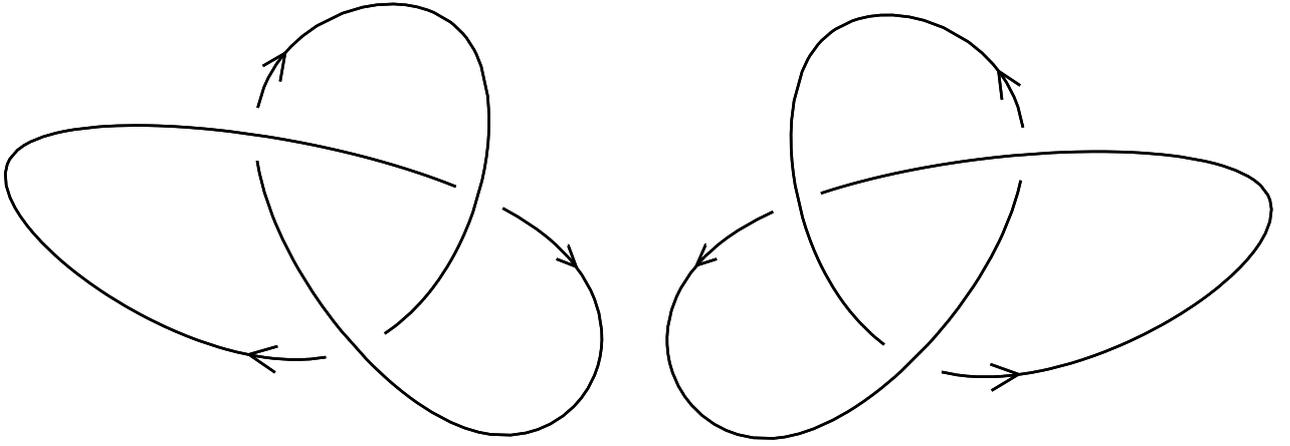


Рис. 3.15. Трилистники

$$w_1(\sigma_1^3) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1^r x_2^r x_1^r x_2 x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}, \\ x_2 \mapsto x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r}. \end{cases}$$

Получаем группу

$$\begin{aligned} G_1(T) &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1^r x_2^r x_1^r x_2 x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r}, x_2 = x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r} \rangle = \\ &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2^r x_1^r = x_2^r x_1^r x_2, x_2 x_1^r x_2 = x_1^r x_2^r x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Автоморфизм  $w_2(\sigma_1^3)$  действует следующим образом

$$w_2(\sigma_1^3) : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1, \\ x_2 \mapsto x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_2(T) &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1, x_2 = x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 \rangle = \\ &= \langle x_1, x_2 \mid (x_1 x_2^{-1})^3 = 1 \rangle = \langle x_1, t \mid t^3 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

где  $t = x_1 x_2^{-1}$ . Видим, что группа  $G_2(T)$  изоморфна  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$ . Очевидно, что  $G_1(T) \not\cong G_2(T)$ , так как последняя имеет кручение.

Рассмотрим трилистник  $\bar{T}$  (см. рис. 3.15 справа). Его можно представить в виде замыкания косы  $\sigma_1^{-3} \in B_2$ . Известно, что классическая группа не отличает трилистник от его зеркального образа, т. е.  $G(\bar{T}) \cong G(T)$ , хотя доказано, что  $T$  не эквивалентен  $\bar{T}$ . Покажем, что для групп  $G_l$ ,  $l = 1, 2$ , ситуация аналогична. Справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12** *Группы  $G_l$ ,  $l = 1, 2$ , не отличают зацепление от его зеркального образа.*

**Доказательство.** Если зацепление  $L$  является замыканием некоторой косы  $\beta \in B_n$ , то зеркальный образ  $\bar{L}$  является замыканием косы  $\beta^{-1}$ . Покажем, что  $G_l(\beta) \cong G_l(\beta^{-1})$ ,  $l = 1, 2$ . По определению группы

$$G_l(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid w_l(\beta)(x_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

$$G_l(\beta^{-1}) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid w_l(\beta^{-1})(x_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Соотношение  $w_l(\beta)(x_i) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , группы  $G_l(\beta)$  равносильно соотношению  $x_i = w_l^{-1}(\beta)(x_i)$ , что эквивалентно следующему

$$x_i = w_l(\beta^{-1})(x_i),$$

т. е. получаем представление группы  $G_l(\beta^{-1})$ . □

Рассмотренные выше примеры (тривиальный узел, зацепление Хопфа, трилистник) являются замыканиями 2-х нитиевых кос. Зацепления, полученные замыканием таких кос называются *2-х нитиевыми торическими зацеплениями*.

Дадим классификацию 2-х нитиевых торических зацеплений с точностью до зеркального образа. В силу предыдущего предложения достаточно

рассматривать зацепления  $\widehat{\sigma}_1^k$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Для представления  $w_1$  справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13** *Группа  $G_1(\sigma_1^k)$ , где  $\sigma_1^k \in B_2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , имеет следующий вид:*

$$G_1(\sigma_1^k) = \langle x_1, x_2 \mid \underbrace{x_1 x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1, \\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2 \rangle,$$

для четного  $k$ ;

$$G_1(\sigma_1^k) = \langle x_1, x_2 \mid \underbrace{x_1 x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2, \\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1 \rangle,$$

для нечетного  $k$ .

**Доказательство.** Пусть  $k$  – нечетное, т. е.  $k = 2m - 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Нетрудно заметить, что автоморфизм  $w_1(\sigma_1^{2m-1})$  действует на порождающие следующим образом:

$$w_1(\sigma_1^{2m-1}) : \begin{cases} x_1 \mapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r} \dots x_1^{-r}}_{2m-1}, \\ x_2 \mapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-2} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r} \dots x_1^{-r}}_{2m-2}. \end{cases}$$

Получаем группу

$$G_1(\sigma_1^{2m}) = \langle x_1, x_2 \mid \underbrace{x_1 x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{2m-2} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{2m-2} x_2, \\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{2m-2} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{2m-2} x_1 \rangle.$$

Пусть  $k$  – четное, т. е.  $k = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Нетрудно заметить, что автоморфизм  $w_1(\sigma_1^{2m})$  действует на порождающие следующим образом:

$$w_1(\sigma_1^{2m}) : \begin{cases} x_1 \mapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r} \dots x_1^{-r}}_{2m}, \\ x_2 \mapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \underbrace{x_1^{-r} x_2^{-r} x_1^{-r} \dots x_1^{-r}}_{2m-1}. \end{cases}$$

Получаем группу

$$G_1(\sigma_1^{2m}) = \langle x_1, x_2 \mid \underbrace{x_1 x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{2m-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{2m-1} x_1, \\ \underbrace{x_2 x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{2m-1} x_2 \rangle.$$

□

Отсюда легко вытекает

**СЛЕДСТВИЕ 2** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда для всякого зацепления  $\widehat{\sigma}_1^k$  фактор-группа группы  $G_1(\sigma_1^k)$  по коммутанту равна

$$G_1(\sigma_1^k)/(G_1(\sigma_1^k))' = \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & \text{при } k = 2m, \\ \mathbb{Z}, & \text{при } k = 2m - 1, \end{cases}$$

где  $m \in \mathbb{N}$ .

Группы, построенные по представлению  $w_2$  для 2-нитицевого торического зацепления будут иметь кручение. А именно, справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14** Группа  $G_2(\sigma_1^k)$ , где  $\sigma_1^k \in B_2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , имеет следующий вид

$$G_2(\sigma_1^k) = \langle x_1, t \mid t^k = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k.$$

**Доказательство.** Пусть  $k = 1$ . В этом случае  $G_2(\sigma_1) = G_2(U) \cong \mathbb{Z}$ .

Предположим, что

$$w_2(\sigma_1^{k-1}) : \begin{cases} x_1 \mapsto (x_1 x_2^{-1})^{k-1} x_1, \\ x_2 \mapsto (x_1 x_2^{-1})^{k-2} x_1, \end{cases}$$

и

$$G_2(\sigma_1^{k-1}) = \langle x_1, t \mid t^{k-1} = 1 \rangle$$

Действуя на  $x_1$  автоморфизмом  $w_2(\sigma_1^k)$ , получим

$$x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1^{k-1})} (x_1 x_2^{-1})^{k-1} x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1)} (x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1})^{k-1} x_1 x_2^{-1} x_1 = (x_1 x_2^{-1})^k x_1.$$

Аналогично, действуя на  $x_2$ :

$$x_2 \xrightarrow{w_2(\sigma_1^{k-1})} (x_1 x_2^{-1})^{k-2} x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1)} (x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1})^{k-2} x_1 x_2^{-1} x_1 = (x_1 x_2^{-1})^{k-1} x_1.$$

Следовательно,

$$G_2(\sigma_1^k) = \langle x_1, x_2 \mid x_1 = (x_1 x_2^{-1})^k x_1, x_2 = (x_1 x_2^{-1})^{k-1} x_1 \rangle = \langle x_1, t \mid t^k = 1 \rangle,$$

где  $t = x_1 x_2^{-1}$ . Видим, что группа  $G_2(\sigma_1^k)$  изоморфна  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k$ .  $\square$

Предложение 14 дает классификацию 2-нитиговых торических зацеплений с точностью до зеркального образа.

### 3.2.2. Группы виртуального трилистника

Пусть  $T_v$  – виртуальный трилистник, изображенный на рисунке 3.16. Используя диаграммный подход, найдем группу  $G_M = G_M(T_v)$ . Она поро-

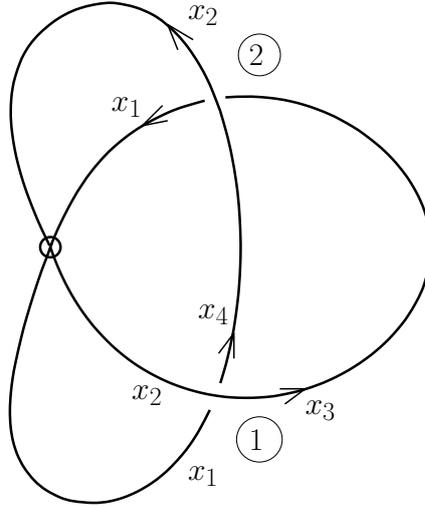


Рис. 3.16. Виртуальный трилистник

дается элементами  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u, v_0, v$  и имеет в первом перекрестке соотношения

$$x_2 x_5^u = x_6 x_3^u, \quad x_5 = x_6^{v_0},$$

во втором перекрестке – соотношения

$$x_6 x_3^u = x_4 x_1^u, \quad x_3 = x_4^{v_0}$$

и в третьем перекрестке – соотношения

$$x_4 = x_5^{v^{-1}}, \quad x_1 = x_2^v.$$

Таким образом,

$$G_M = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_5^u = x_6x_3^u, \quad x_5 = x_6^{v_0}, \quad x_6x_3^u = x_4x_1^u, \quad x_3 = x_4^{v_0}, \quad x_4 = x_5^{v^{-1}}, \quad x_1 = x_2^v \rangle.$$

Выражаем из 5-го и 7-го соотношения порождающие  $x_5$  и  $x_3$  соответственно. Подставив эти выражения в другие соотношения и удаляя  $x_5$  и  $x_3$ , приходим к представлению

$$G_M = \langle x_1, x_2, x_4, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_6^{v_0u} = x_6x_4^{v_0u}, \quad x_6x_4^{v_0u} = x_4x_1^u, \quad x_4 = x_6^{v_0v^{-1}}, \quad x_1 = x_2^v \rangle.$$

Выражаем порождающие  $x_4$  и  $x_1$  из 6-го и 7-го соотношений соответственно. Подставив эти выражения в оставшиеся соотношения и удалив  $x_4$  и  $x_1$ , придем к представлению

$$G_M = \langle x_2, x_6, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \\ x_2x_6^{v_0u} = x_6x_6^{v_0v^{-1}v_0u}, \quad x_6x_6^{v_0v^{-1}v_0u} = x_6^{v_0v^{-1}}x_2^{vu} \rangle.$$

Из 4-го соотношения выражаем

$$x_2 = x_6x_6^{v_0^2v^{-1}u}x_6^{-v_0u}.$$

Подставив это выражение в 5-е соотношение и удаляя  $x_2$ , приходим к представлению

$$G_M = \langle x, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, \quad xx^{v_0^2v^{-1}u} = x^{v_0v^{-1}}xx^{v_0^2v^{-1}u}x^{-v_0u} \rangle.$$

где символом  $x$  обозначен  $x_6$ .

Заметим, что последнее соотношение равносильно такому

$$xx^{v_0^2v^{-1}u}x^{v_0u} = x^{v_0v^{-1}}xx^{v_0^2v^{-1}u}.$$

Сопрягая его элементом  $v$ , приходим к представлению

$$G_M = \langle x, u, v_0, v \mid [u, v_0] = [u, v] = [v_0, v] = 1, x^{v_0} \left( x^v x^{v_0^2 u} \right) = \left( x^v x^{v_0^2 u} \right) x^{v_0 v u} \rangle.$$

Найдем группу  $G_{\widetilde{M}} = G_{\widetilde{M}}(T_v)$ , используя представление  $\widetilde{\varphi}_M : VB_2 \longrightarrow \text{Aut}(F_{2,2})$ , где  $F_{2,2} = F_2 * \mathbb{Z}^2$ ,  $F_2 = \langle y_1, y_2 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Виртуальный трилистник  $T_v$  является замыканием косы  $\sigma_1^2 \rho_1 \in VB_2$ . Этой косе отвечает автоморфизм  $\widetilde{\varphi}(\sigma_1^2 \rho_1)$ , который действует следующим образом

$$\widetilde{\varphi}_M(\rho_1 \sigma_1^2) : \begin{cases} y_1 \longmapsto y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{v_1^{-1}} y_1^{-v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ y_2 \longmapsto y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ v_1 \longmapsto v_2, \\ v_2 \longmapsto v_1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$G_{\widetilde{M}} = \langle y_1, y_2, v_1, v_2 \mid [v_1, v_2] = 1, y_1 = y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{v_1^{-1}} y_1^{-v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, \\ y_2 = y_2^{v_1^{-1}} y_1^{v_2} y_2^{-v_1^{-1}}, v_1 = v_2, v_2 = v_1 \rangle.$$

Полагая  $v = v_1 = v_2$ , получим

$$G_{\widetilde{M}} = \langle y_1, y_2, v \mid y_1 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{v^{-1}} y_1^{-v} y_2^{-v^{-1}}, y_2 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-v^{-1}} \rangle.$$

Используя второе соотношение, можем упростить первое:

$$G_{\widetilde{M}} = \langle y_1, y_2, v \mid y_1 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-1}, y_2 = y_2^{v^{-1}} y_1^v y_2^{-v^{-1}} \rangle.$$

Из второго соотношения выражаем

$$y_1 = y_2^{-v^{-2}} y_2^{v^{-1}} y_2^{v^{-2}}.$$

Подставив это выражение в первое соотношение и исключая  $y_1$ , придем к представлению

$$G_{\widetilde{M}} = \langle y, v \mid y \left( y^{v^{-1}} y^v \right) = \left( y^{v^{-1}} y^v y \right) \rangle.$$

где символом  $y$  обозначили  $y_2$ .

Известно, что виртуальный трилистник можно представить как диаграмму на плоскости некоторого классического узла, вложенного в утолщенный тор. Фундаментальная группа дополнения этого узла в утолщенном торе найдена в [12]. Обозначим её символом  $G_C = G_C(T_v)$ . Тогда

$$G_C = \langle z, a, b \mid [a, b] = 1, z(z^a z^b) = (z^a z^b) z^{ab} \rangle.$$

Возникает естественный вопрос о связи групп  $G_M$ ,  $G_{\widetilde{M}}$  и  $G_C$ . Ответ на этот вопрос дает

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15** *Группы  $G_M$ ,  $G_{\widetilde{M}}$  и  $G_C$  не изоморфны и существует последовательность эпиморфизмов*

$$G_M \longrightarrow G_C \longrightarrow G_{\widetilde{M}}.$$

**Доказательство.** Найдем абелизации групп  $G_M$ ,  $G_{\widetilde{M}}$  и  $G_C$ . Образы порождающих при отображении в фактор-группу по коммутанту обозначим чертой сверху.

$$[G_M]_{ab} = \langle \bar{x}, \bar{u}, \bar{v}_0, \bar{v} \rangle \cong \mathbb{Z}^4,$$

$$[G_{\widetilde{M}}]_{ab} = \langle \bar{y}, \bar{v} \rangle \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$[G_C]_{ab} = \langle \bar{z}, \bar{a}, \bar{b} \rangle \cong \mathbb{Z}^3.$$

Фактор-группы по коммутанту групп  $G_M$ ,  $G_{\widetilde{M}}$  и  $G_C$  не изоморфны, следовательно группы  $G_M$ ,  $G_{\widetilde{M}}$  и  $G_C$  не изоморфны.

Эпиморфизм  $G_M \longrightarrow G_C$  задается следующим образом

$$x \mapsto z, \quad v_0 \mapsto 1, \quad v \mapsto a, \quad u \mapsto b.$$

Эпиморфизм  $G_C \longrightarrow G_{\widetilde{M}}$  задается следующим образом

$$z \mapsto y, \quad a \mapsto v^{-1}, \quad b \mapsto v.$$

□

Сформулируем такую гипотезу.

**Гипотеза.** Пусть  $K$  – виртуальный узел рода 1 (т. е.  $K$  представляется диаграммой классического узла, вложенной в утолщенный тор). Тогда существует эпиморфизм  $G_M(K) \longrightarrow G_C(K)$ .

## Заключение

В диссертации изучались вопросы о построении представлений виртуальных кос автоморфизмами и определении групп виртуальных зацеплений, являющихся инвариантами зацеплений

В рамках данной тематики получены следующие результаты:

1. Было построено представление группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения свободной и свободной абелевой групп, обобщающее все ранее известные представления (теорема 1).
2. Были построены продолжения представлений Вады на группу виртуальных кос (теорема 3).
3. По каждому из построенных представлений была определена группа виртуального зацепления и было доказано, что она является инвариантом виртуального зацепления (теоремы 6, 7, 8).

## Список литературы

1. В. Г. БАРДАКОВ. Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. – Т. 42, №5. – 2003. – С. 515–541.
2. В. МАГНУС, А. КАРРАС, Д. СОЛИТЕР. Комбинаторная теория групп / М: Наука. – 1974.
3. В. О. МАНТУРОВ. О распознавании виртуальных кос // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. – Т. 299, №8. – 2003. – С. 267-286.
4. А. А. МАРКОВ. Основы алгебраической теории кос // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР. – Т. 16. – 1945. – С. 1-54.
5. А. Г. САВУШКИНА. О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы // Мат. Заметки. – Т. 60, №1. – 1996. – С. 92-108.
6. А. Г. САВУШКИНА. Сопрягающие базис автоморфизмы свободной группы // Вест. Моск. Ун-та. – Сер. 1. мат. мех, №4. – 1996. – С. 17-21.
7. V. G. BARDAKOV. The virtual and universal braids // Fund. Math. – V. 181. – 2004. –P. 1-18.
8. V. G. BARDAKOV. Virtual and welded links and their invariants // Sib. Elektron. Mat. Izv. – V. 2. – 2005 – P. 196-199.
9. V. G. BARDAKOV, P. BELLINGERI. Groups of virtual and welded links // J. Knot Theory Ramifications. – V. 23, №3. – 2014. – 1450014. – 23p.
10. J. S. BIRMAN. Braids, Links, and Mapping Class Groups / Annals of Math. Studies, Princeton University Press. – V. 82. – 1974.
11. H. U. BODEN, E. DIES, A. I. GAUDREAU, A. GERLINGS, E. HARPER, A. J. NICAS. Alexander invariants for virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. – V. 24, №3. – 2015. – 1550009. – 62p.
12. J. S. CARTER, D. SILVER, S. WILLIAMS. Invariants of links in thickened surfaces // Algebr. Geom. Topol. – V. 14, №3. – 2014. – P. 1377-1394.

- 
13. J. CHRISP, L. PARIS. Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups // Pacific J. Math. – V. 221, №1. – 2005. – P. 1-27.
  14. O. CHTERENTAL. Virtual braids and virtual curve diagrams // J. Knot Theory Ramifications. – V. 24, №13. – 2015. – 1541001. – 24p.
  15. R. CROWELL, R. FOX. Introduction to knot theory / Graduate Texts in Mathematics. – V. 57. – 1977.
  16. M. ELHAMDADI, M. SAITO, J. S. CARTER, D. SILVER AND S. WILLIAMS. Virtual knot invariants from group biquandles and their cocycles // J. Knot Theory Ramifications. – V. 18, №7. – 2009. – P. 957-972.
  17. R. FENN, R. RIMANYI, C. ROURKE. The braid-permutation group // Topology. – V. 36, №1. – 1997. – P. 123-135.
  18. M. GOUSSAROV, M. POLYAK, O. VIRO. Finite type invariants of classical and virtual knots // Topology. – V. 39. – 2000. – P. 1045-1068.
  19. T. ITO. The classification of Wada-type representations of braid groups // J. Pure Appl. Algebra. – V. 217, №9. – 2013. – P. 1754-1763.
  20. S. KAMADA. Invariants of virtual braids and a remark on left stabilisations and virtual exchange moves // Kobe J. Math. – V. 21. – 2004. – P. 33-49.
  21. C. KASSEL, V. TURAEV. Braid groups / Graduate Texts in Mathematics. – №217. – 2008.
  22. L. H. KAUFFMAN. Virtual knot theory // Eur. J. Comb. – V. 20, №7.– 1999. – P. 663-690.
  23. L. H. KAUFFMAN, S. LAMBROPOULOU. The L-Move and Virtual Braids // J. Knot Theory Ramifications. – V. 15, №6. – 2006. – P. 773-811.
  24. T. KISHINO, S. SATOH. A note on non-classical virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. – V. 13, №7. – 2004. – P. 845-856.

- 
25. X. LIN, S. NELSON. On generalized knot groups // J. Knot Theory Ramifications. – V. 17, №3. – 2008. – P. 263-272.
  26. V. O. MANTUROV, D. P. ILYUTKO. Virtual Knots. The State of the Art / Singapore, World Scientific Press. – 2013.
  27. J. MCCOOL. On basis-conjugating automorphisms of free groups // Canad. J. Math. – V. 38, №6. – 1986. – P. 1525-1529.
  28. S. NELSON, W. NEUMANN. The 2-generalized knot group determines the knot // Commun. Contemp. Math. – V. 10, suppl.1. – 2008. – P. 843-847.
  29. V. SHPILRAIN. Representing braids by automorphisms // Intern. J. Algebra Comput. – V. 11, №6. – 2001. P. 773-777.
  30. D. SILVER, S. G. WILLIAMS. Alexander groups and virtual links // J. Knot Theory Ramifications. – V. 10, №1. – 2001. – P. 151-160.
  31. D. SILVER, S. G. WILLIAMS. Alexander groups of long virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. – V. 15, №1. – 2006. – P. 43-52.
  32. D. TONG, SH. YANG, ZH. MA. A new class of representations of braid groups // Commun. Theor. Phys. – V. 26, №4. – 1996. – P. 483-486.
  33. V. V. VERSHININ. On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Ramifications. – V. 10, №5. – 2001. – P. 795-812.
  34. M. WADA. Group invariants of links // Topology. – V. 31, №2. – 1992. – P. 399-406.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в  
журналах из списка ВАК

35. Ю. А. МИХАЛЬЧИШИНА. Локальные представления групп кос // Сиб. матем. журн. – Т. 54, №4. – 2013. – С. 838-851.
36. V. G. BARDAKOV, YU. A. MIKHALCHISHINA, M. V. NESHCHADIM. Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot

groups // J. Knot Theory Ramifications. – V. 26, №1. – 2017. – 1750003.  
– 17p.

37. Ю. А. МИХАЛЬЧИШИНА. Обобщения представлений Вады и группы виртуальных зацеплений // Сиб. матем. журн. – Т. 58, №3. – 2017. – С. 641-659.
38. В. Г. БАРДАКОВ, Ю. А. МИХАЛЬЧИШИНА, М. В. НЕЩАДИМ. Группы виртуальных зацеплений // Сиб. матем. журн. – Т. 58, №5. – 2017. – С. 989-1003.

### Тезисы конференций

39. Ю. А. МИХАЛЬЧИШИНА. Локальные представления группы кос // Межд. конф. Мальц. чтения. – 2012. – С. 70.
40. YU. A. MIKHALCHISHINA. Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // Groups and graphs, algorithms and automata: Abstracts of the International conf. and PhD Summer School. – 2015. – P. 74.