

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

На правах рукописи

Лисицына Мария Александровна

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ

Специальность 01.01.09 –
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Августинович С.В.

Новосибирск – 2017

Оглавление

Введение	3
1. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов ..	11
Предварительные сведения	11
Призма и лестница Мебиуса	15
Обобщенный граф Петерсена	18
Скращенная призма	20
Хордальный цикл	22
Усеченные кубические графы	24
Граф Паппа	26
2. Совершенные раскраски призмы	27
2.1. Совершенные 3-раскраски призмы и лестницы Мебиуса	27
Предварительные сведения	27
Основные результаты	31
2.2. Совершенные раскраски бесконечной призмы	34
Допустимые полураскраски	37
Стандартные бесконечные серии	44
Основные результаты	49
3. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2	52
Определения и обозначения	52
Конструкции совершенных раскрасок	54
Предварительные сведения	57
Основная теорема	60
Заключение	65
Литература	66

Введение

Актуальность темы. В работе решаются задачи, находящиеся на стыке алгебраической комбинаторики и теории графов. Предмет исследования — совершенные раскраски транзитивных графов ограниченной степени.

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный неориентированный граф. *Совершенной раскраской графа G* с матрицей параметров $M = (m_{ij})$ называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета i число смежных с ней вершин цвета j равняется m_{ij} . Матрицу M назовем *допустимой для графа G* , если существует совершенная раскраска графа G с матрицей параметров M . Очевидно, что если M допустима для некоторого графа, то её элементы являются неотрицательными целыми числами, причём $m_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $m_{ji} = 0$, в силу симметричности отношения смежности. В англоязычной литературе для совершенных раскрасок используют термины *partition designs* (схемы разбиения) или *equitable partitions* (равномерные разбиения).

Задача классификации совершенных раскрасок близка к проблемам теории кодирования. Одно из классических понятий теории кодирования — совершенный код — является частным случаем совершенной раскраски n -мерного двоичного куба E^n . Вершины цвета 1 в совершенной раскраске E^n с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$ образуют совершенный двоичный код с расстоянием 3. Приведенный пример показывает, что задача классификации совершенных раскрасок не может быть проще, чем задача классификации совершенных кодов.

Совершенные раскраски являются обобщением и других известных кодов, например, полностью регулярных и равномерно упакованных кодов, таких как коды Препараты.

Опишем структуру доказательств теорем, характеризующих совершенные раскраски графов. Всякое доказательство имеет позитивную часть (конструкции раскрасок), часто подкрепленную рисунками, и негативную составляющую, опирающуюся на необходимые условия существования и локальный перебор

Поиск конструкций совершенных раскрасок обычно начинают с применения орбитного метода. Общая идея этого метода состоит в следующем. Пусть H является некоторой подгруппой группы автоморфизмов графа G . Действие группы H разбивает множество вершин графа G на непересекающиеся орбиты. Поставив орбитам в соответствие различные цвета, получим совершенную раскраску вершин G [14]. Совершенную раскраску вершин графа в минимальное количество цветов можно построить алгоритмом полиномиальной сложности, предложенным В. Г. Визингом [2]. Согласно алгоритму Визинга такая минимальная раскраска регулярного графа является одноцветной.

Классическим способом доказательства несуществования совершенных раскрасок с заданными параметрами является спектральный метод, суть которого заключается в следующем факте. Характеристический многочлен матрицы параметров совершенной раскраски делит характеристический многочлен матрицы смежности графа. Следовательно, матрица, собственные числа которой отличаются от собственных чисел графа G , не является для него допустимой.

Сформулированное необходимое условие не для всякого набора параметров позволяет сделать вывод о его допустимости. В таких случаях исследователям приходится прибегать к перебору. Здесь важную роль играют структурные свойства графа: двудольность, величина обхвата, наличие длинных циклов и локально жестких фрагментов. Графы, изучаемые в рамках данной работы, выбраны таким образом, чтобы объем перебора, необходимого для решения поставленных задач, был допустимым.

Объектами исследования диссертации являются транзитивные графы ограниченной степени. Транзитивным называется граф, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на множестве его вершин. Очевидно, транзитивный граф является регулярным.

В работе изучаются транзитивные графы степени 3 и 4. Кубическим называется 3-регулярный граф. Первая глава посвящена совершенным 2-раскраскам кубических графов. В ней рассмотрены шесть бесконечных серий и граф Пап-

па. Во второй главе исследован граф, который является обобщением одной из таких серий на случай счетного числа вершин. Речь идет о графе бесконечной призмы P_∞ , являющимся прямым произведением бесконечной цепи на ребро. Для бесконечной призмы автором диссертации решена задача описания всех совершенных раскрасок в конечное число цветов. В третьей главе такая задача решена для другого бесконечного графа — графа Кэли группы Z с системой образующих $\{1, 2\}$. Назовем его *бесконечным циркулянтным графом с дистанциями 1 и 2* и обозначим $Si_\infty(2)$.

Ранее изучались совершенные раскраски ряда графов и классов графов: n -мерного двоичного куба, графа Джонсона, графов прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, циркулянтных графов.

В работе 2007 года Д. Г. Фон-Дер-Флаасс получил первые необходимые условия на параметры возможных совершенных 2-раскрасок булева куба, и построил рекурсивную конструкцию, дающую бесконечную серию таких раскрасок [11]. Позднее этим же автором была получена так называемая граница корреляционной иммунности [18]. Она позволила получить сильное необходимое условие существования совершенных раскрасок гиперкуба. Впоследствии Фон-Дер-Флаасс изучил раскраски, достигающие этой границы в 12-мерном кубе [10]. Отметим, что понятие корреляционной иммунности широко используется в криптографии. Еще одна конструкция, которая позволила строить множество различных совершенных 2-раскрасок для большого количества матриц параметров, была предложена в совместной работе Д. Г. Фон-Дер-Флаасса и К. В. Воробьева [3]. Заметим, что на сегодняшний день полного описания всех матриц совершенных раскрасок гиперкуба пока не найдено даже для случая двух цветов.

Графом Джонсона $J(n, w)$ называется граф, вершинами которого являются двоичные векторы длины n веса w , пара векторов соединяется ребром, если они отличаются ровно в двух координатах.

У. Мартин показал, что совершенную 2-раскраску $J(n, w)$ можно полу-

чить, покрасив блоки $(w-1)-(n, w, \lambda)$ -схемы в один цвет, а оставшиеся вершины $J(n, w)$ в другой цвет [21]. Проблеме существования таких схем для различных параметров посвящены работы многих выдающихся математиков. Отметим, что для большого количества наборов параметров такая проблема является открытой.

Систематическое исследование задачи существования совершенных 2-раскрасок графов Джонсона, включающее в себя вопросы существования $(w-1)-(n, w, \lambda)$ -схем выполнено в диссертации И. Ю. Могильных [6]. В работе получен ряд (как бесконечных, так и спорадических) конструкций совершенных 2-раскрасок графов Джонсона, также установлено несколько необходимых условий существования таких раскрасок. С помощью таких конструкций и разработанных необходимых условий существования перечислены (теоретически, без использования компьютера) параметры всех совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(n, w)$ для $n \leq 8$. А. Л. Гаврилюк и С. В. Горяинов получили полное описание допустимых матриц второго порядка графа $J(n, 3)$ для нечетных n [19]. Таким образом, задача классификации совершенных раскрасок графа Джонсона $J(n, w)$ остается не решенной для многих пар n и w даже в случае двух цветов.

Пусть $G = (V, E)$ - граф, $M = (m_{ij})$ - квадратная матрица порядка n , $r \geq 1$. Понятие *совершенной раскраски радиуса r* с матрицей M для графа G определяется аналогично понятию совершенной раскраски вершин этого графа с матрицей M с тем лишь отличием, что m_{ij} — количество вершин цвета j на расстоянии не более r от вершины x цвета i .

Для графа бесконечной прямоугольной решетки $G(Z^2)$ первые результаты получены М. Аксенович [17]: она перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 2 цвета и нашла некоторые необходимые условия для того, чтобы матрица была допустимой в случае $r \geq 2$. Параметры и свойства совершенных раскрасок такого графа в своей кандидатской диссертации изучала С. А. Пузынина [8]. В своих работах она показала, что все совершен-

ные раскраски радиуса $r > 1$ бесконечной прямоугольной решетки являются периодическими, а также доказала их периодизуемость в случае $r = 1$. Этим же автором описаны все допустимые матрицы третьего порядка графа $G(Z^2)$. Совершенные раскраски такого графа вплоть до 9 цветов получены Д. С. Кротовым [20].

Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если ее матрица параметров приводима к трехдиагональному виду. Фактически это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них, кроме себя, будет видеть лишь два соседних цвета, при этом каждый из крайних цветов (первый и последний) образует полностью регулярный код. Параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки перечислены С. В. Августиновичем, А. Ю. Васильевой и И. В. Сергеевой [1].

Изучались совершенные раскраски и других бесконечных решеток: треугольной и гексагональной. С. А. Пузынина доказала периодизуемость совершенных раскрасок таких транзитивных решеток [23]. Дистанционно-регулярные раскраски бесконечной треугольной решетки были перечислены А. Ю. Васильевой [24], гексагональной решетки — С. В. Августиновичем, Д. С. Кротовым и А. Ю. Васильевой [15].

Граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а ребрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ называется *бесконечным циркулянтным графом с дистанциями* d_1, d_2, \dots, d_n и обозначается $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$. По графу $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ можно построить соответствующий ему циркулянтный граф длины t , обозначим его через $C_t(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Множество его вершин совпадает с множеством элементов группы Z_t , для любой вершины мультимножество инцидентных ей ребер имеет вид $\{\{v, v \pm d_i \bmod t\} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Бесконечный циркулянтный граф, набор дистанций которого образует отрезок натуральных чисел от 1 до n , называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором n дистанций* и обозначается $Ci_\infty(n)$.

Ряд результатов для совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов получен Д. Б. Хорошиловой [13, 12]. Полное описание совершенных раскрасок бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций в 2 цвета получено О. Г. Паршиной [7]. В 2015 году этим же автором сформулирована гипотеза, характеризующая совершенные раскраски графов $Ci_\infty(n)$ в произвольное конечное число цветов [22]. В диссертации получены результаты, подтверждающие эту гипотезу для $n \leq 2$, для $n > 2$ задача еще не решена.

Рассматривая всевозможные совершенные раскраски заданного графа или класса графов, особое внимание уделялось случаю двух цветов, потому что в рамках этого случая представляется возможным разработать инструменты для изучения совершенных раскрасок объектов и собрать материал для обобщения, не перегружая исследование перебором большого числа параметров. В данной диссертации охарактеризованы все совершенные раскраски графа бесконечной цепи, графа P_∞ и $Ci_\infty(2)$ в любое конечное число цветов. Полученные результаты относятся к числу немногих известных описаний такого рода для бесконечных графов или бесконечных серий графов.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 6 работ, в том числе 4 статьи в журналах из списка ВАК.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли апробацию на семинарах «Теория кодирования», «Квазигруппы и смежные вопросы», «Теория графов» и «Дискретный анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (2015—2017 гг.). Результаты диссертации также докладывались на Международной Студенческой Научной Конференции (НГУ, 2010 г.).

Цели и структура работы. Объектами исследования являются такие семейства транзитивных графов ограниченной степени, как транзитивные кубические графы, граф бесконечной призмы и бесконечный циркулянтный граф с дистанциями 1 и 2. **Цель работы** состоит в характеристике совершенных раскрасок таких графов.

Первая глава диссертации посвящена описанию параметров совершенных 2-раскрасок кубических графов. Рассмотрены шесть бесконечных семейств таких графов: конечные призмы, лестницы Мебиуса, обобщенные графы Петерсена, скрещенные призмы, хордальные циклы и усеченные графы. Такие бесконечные серии графов вместе с графом Паппа покрывают все транзитивные кубические графы с числом вершин, не превосходящим 18 [5]. Для каждого из этих семейств охарактеризованы допустимые параметры совершенных раскрасок в два цвета. Чтобы решить поставленную задачу, автором разработан и реализован метод локально жестких фрагментов, эффективный для изучения совершенных раскрасок конечных графов малого обхвата.

Во **второй главе** изучаются совершенные раскраски графов призмы и лестницы Мебиуса. Параграф 2.1 посвящен совершенным 3-раскраскам, а параграф 2.2 — совершенным раскраскам в произвольное конечное количество цветов. Случай трех цветов выделен в самостоятельный параграф, для того чтобы показать работу двух различных методов. В решении задачи полной характеристики допустимых матриц третьего порядка для конечных призм и лестниц Мебиуса большую роль играет гомоморфизм бесконечной прямоугольной решетки на тороидальный граф. Полное описание совершенных раскрасок графа P_∞ в конечное число цветов получено применением введенного автором диссертации принципа индуцирования. Этот принцип использует двудольность исследуемого графа и в корне отличается от подхода, реализованного в предыдущем параграфе.

В **третьей главе** задача характеристики всех совершенных раскрасок в конечное число цветов решена для графа $Si_\infty(2)$. Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями 1 и 2 не является двудольным. Таким образом, для исследования его совершенных раскрасок создан еще один метод — метод минимальных расстояний в $(0,1)$ -разметках.

Определим некоторые понятия, необходимые для описания основного результата третьей главы. Любая совершенная раскраска графа $Si_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$

является периодической [13], значит, для описания совершенной раскраски достаточно указать ее наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой.

Пусть $k \geq 1$. Совершенные раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами $S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ k]$, $S_{11}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$, $S_{12}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$ и $S_{22}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1]$ будем называть *стандартными*.

Совершенные раскраски графов $Ci_\infty(n)$ с длинами периодов $2n$, $2n+1$ и $2n+2$, которые не являются стандартными, назовем *нестандартными*.

Ранее была выдвинута гипотеза о том, что все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа $Ci_\infty(n)$ исчерпываются стандартными бесконечными сериями и нестандартными совершенными раскрасками [22]. Основной результат третьей главы подтверждает гипотезу в случае $n = 2$.

1 Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов

В первой главе исследуются совершенные раскраски транзитивных кубических графов. Изучение совершенных раскрасок таких графов начнем со случая двух цветов. Следует отметить, что транзитивных кубических графов очень много. Это видно на примере списка диаграмм таких графов с числом вершин, не превосходящих 18 (рис. 1). Все диаграммы оставлены в редакции автора [5].

В данной главе описаны все допустимые параметры совершенных раскрасок в 2 цвета графов следующих бесконечных серий: конечных призм, лестниц Мебиуса, скрещенных призм, хордальных циклов, обобщенных графов Петерсена, усеченных графов. Заметим, что графы таких семейств вместе с графом Паппа накрывают все транзитивные кубические графы с числом вершин, не превосходящим 18.

Предварительные сведения

Для удобства первый цвет в совершенных 2-раскрасках будем называть белым, а второй — черным. Матрица параметров совершенной 2-раскраски имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и означает следующее. Каждая вершина белого цвета соседствует ровно с a и b вершинами белого и черного цветов соответственно. Аналогичный смысл имеют параметры c и d для черных вершин. Параметры a и d будем называть *внутренними степенями*, а b и c — *внешними степенями* белого и черного цветов соответственно.

Напомним, что матрица M называется *допустимой для графа G* , если существует совершенная раскраска вершин графа G с матрицей параметров M . Две матрицы совершенных раскрасок называются *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов.

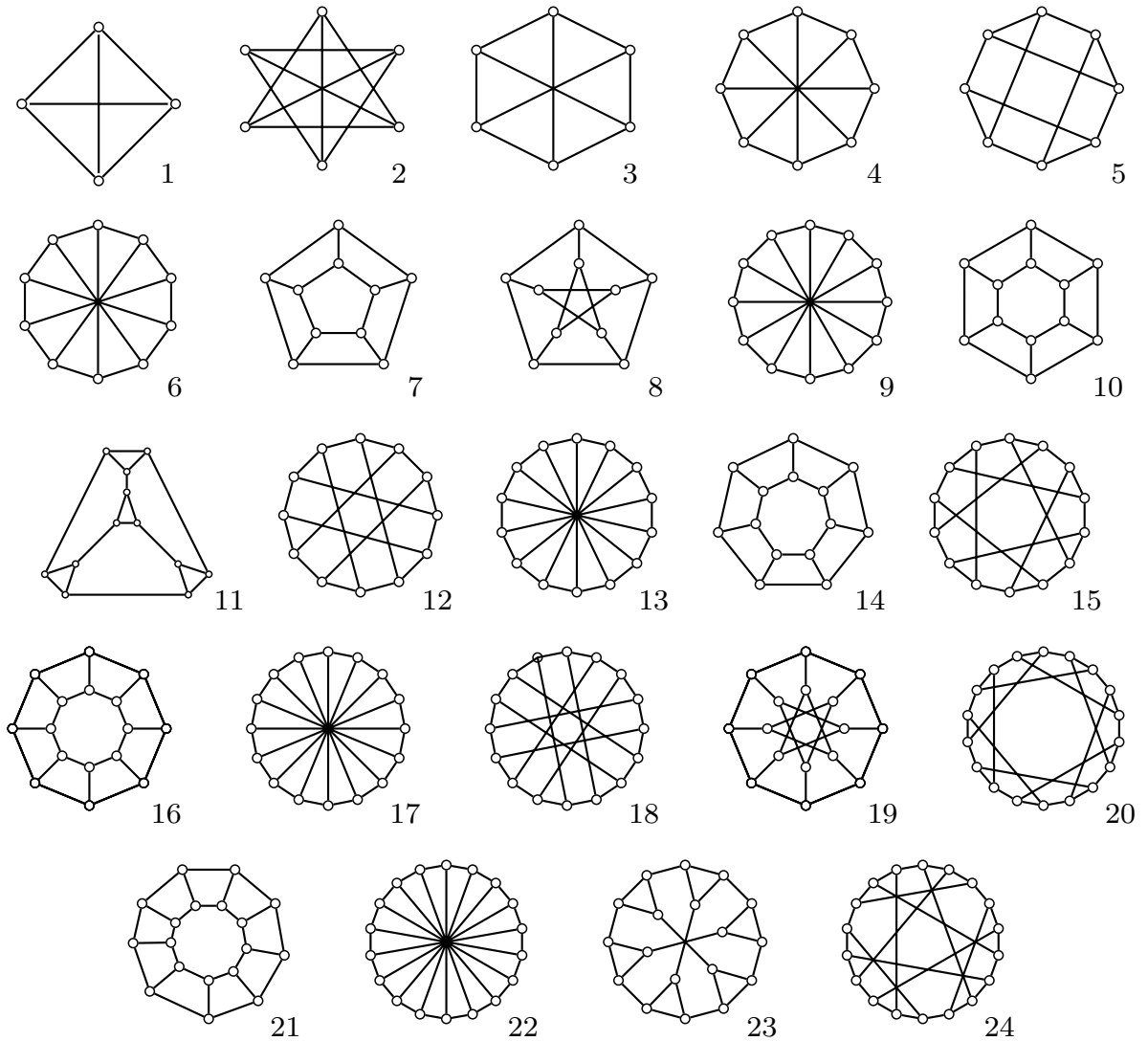


Рис. 1: Диаграммы транзитивных кубических графов.

Не теряя общности, можно считать, что каждая матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, допустимая для некоторого кубического графа, удовлетворяет соотношениям $1 \leq b \leq c \leq 3$. И, естественно, $a + b = 3, c + d = 3$.

С учетом сказанного справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Матрицами параметров совершенной 2-раскраски кубического графа G являются только следующие 6 матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Везде в дальнейшем используются именно эти обозначения для рассматриваемых матриц. Проще всего решать вопрос о допустимости матрицы A_6 — проверка двудольности графа обычно не вызывает затруднений.

Лемма 2. Пусть матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ допустима для графа G . Тогда

1. число белых вершин графа G относится к числу его черных вершин, как c/b ;
2. число вершин графа G кратно $(b+c)/(b,c)$, где (b,c) — наибольший общий делитель чисел b и c .

Доказательство. Почти очевидно, поскольку вершины белого и черного цветов в графе G порождают бирегулярный двудольный граф со степенями долей b и c соответственно. □

Лемма 3. Пусть G — кубический граф с N вершинами. Следующие ограничения на N являются необходимыми условиями допустимости матриц для графа G :

1. если матрица A_1 допустима для двудольного графа G , то N кратно 4;
2. если матрица A_2 допустима для графа G , то N кратно 3;
3. если матрица A_3 допустима для графа G , то N кратно 4;
4. если матрица A_4 допустима для графа G , то N кратно 4;
5. если матрица A_5 допустима для графа G , то N кратно 5.

Доказательство. В силу леммы 2 в доказательстве нуждаются только пп. 1 и 3.

1. Пусть G — двудольный кубический граф и матрица A_1 допустима для него. Внутренние степени обоих цветов в соответствующей раскраске равны двум, значит, каждый цвет образует циклы, причем в силу двудольности — четные. Отсюда число вершин каждого цвета четно и эти числа совпадают. Значит, необходимым условием допустимости матрицы A_1 для двудольного графа G является кратность N четырем.

3. Рассуждения аналогичны пункту 1. Разница в том, что четность числа белых вершин обеспечена внутренней степенью 1 — они образуют паросочетание. \square

Для дальнейшего нам потребуются новые понятия. Пусть T — произвольный фрагмент (подмножество вершин) транзитивного графа G . Под действием каждого из автоморфизмов G фрагмент T занимает некоторое новое положение, причем множество всех таких положений с постоянной кратностью покрывает множество вершин графа G . Это соображение делает очевидной следующую лемму.

Лемма 4. *(О среднем) Если доля белых вершин в некотором фрагменте совершенной 2-раскраски транзитивного графа G больше соответствующей доли во всем графе, то найдется такое положение фрагмента, в котором доля белых вершин меньше средней, и наоборот.*

Как следствие, если усредненное число белых вершин по всем положениям фрагмента дробное, то реализуются обе ситуации.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных серий графов, следует вспомнить, что каждое доказательство имеет позитивную и негативную части. Позитивная часть подкрепляется рисунками, причем изображению совершенной раскраски графа с матрицей параметров A_1 соответствует подпись a , с матрицей параметров A_2 — b и т. д. согласно порядку букв в алфавите. Несуществование раскрасок опирается на сформулированные выше леммы и локальный перебор. Сократить перебор помогает понятие локально жесткого фрагмента.

Подмножество T вершин графа G называется *локально жестким фрагментом*, если из совпадения на T двух совершенных раскрасок графа G с одинаковыми параметрами вытекает их полное совпадение. Ясно, что для описания всех совершенных раскрасок достаточно перебрать варианты раскрасок локально жестких фрагментов. Правда, не всегда для бесконечной серии гра-

фов можно подыскать подходящий ограниченный фрагмент (см. скрещенная призма).

Призма и лестница Мебиуса

Далее всюду n — натуральное число.

Назовем граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер $E = \{(i, i + 1) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\} \cup \{(i, i + 2) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\}$ (сложение по модулю $2n$) *призмой* $P(n)$.

Граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер $E = \{(i, i + 1), (i, i + n) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\}$ (сложение по модулю $2n$) называется *лестницей Мебиуса* $M(n)$.

На рис. 2 показано локальное строение призмы и лестницы Мебиуса. Разница в том, что у лестницы Мебиуса концы полосы перед соединением перекручиваются на один оборот.

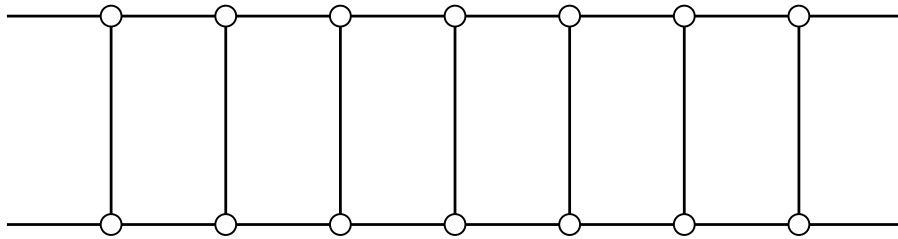


Рис. 2: Локальное строение призмы

На рис. 1 призмами и лестницами Мебиуса являются диаграммы под номерами 2, 5, 7, 10, 14, 16, 21 и 3, 4, 6, 9, 13, 17, 22 соответственно. Легко убедиться в том, что призма и лестница Мебиуса являются кубическими транзитивными графами.

Лемма 5. *(О локальной жесткости) В графах $P(n)$ и $M(n)$ всякий 4-цикл является локально жестким фрагментом.*

Доказательство. Зная цвета вершин 4-цикла и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на пару вершин соседнего 4-цикла и т. д.

Это, конечно, не гарантирует непротиворечивости, но зато гарантирует единственность. \square

Теорема 1. *Допустимые матрицы второго порядка для конечной призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 при любых n ;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_3 при четных n ;
4. A_4 при n , кратных 4;
5. A_5 не является допустимой ни при каких n ;
6. A_6 при четных n .

Доказательство. В доказательстве нуждаются только пп. 4 и 5, справедливость остальных пунктов либо очевидна, либо следует из рис. 3 и леммы 3.

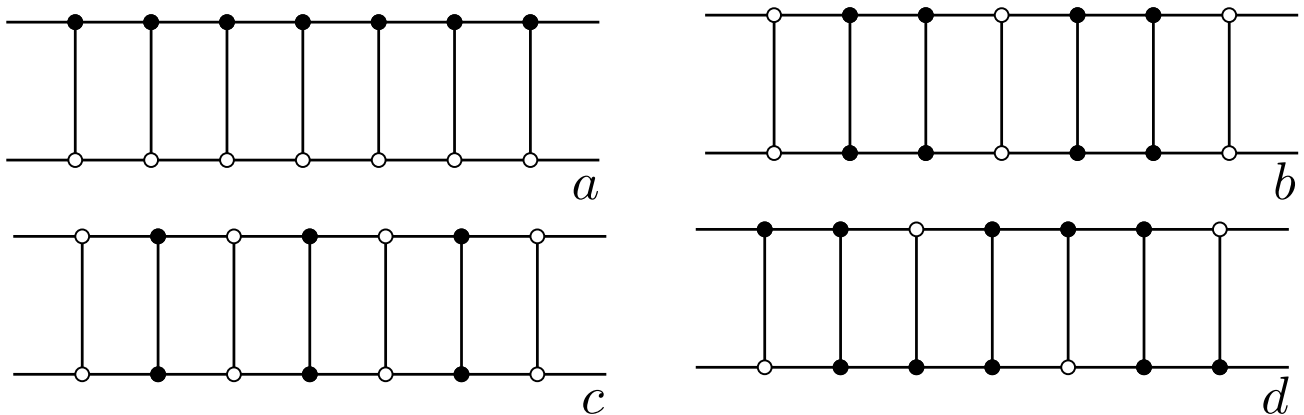


Рис. 3: Совершенные 2-раскраски конечной призмы

4. Рассмотрим совершенную 2-раскраску графа $P(n)$ с матрицей параметров A_4 . Белые вершины не могут находиться на расстоянии меньше 3 друг от друга, поэтому найдется 4-цикл, в котором одна вершина покрашена белым цветом, а остальные — черным. По указанному фрагменту призмы без труда восстанавливается раскраска всего графа. Последняя изображена на рис. 3 *d*. Заметим, что эта раскраска единственна с точностью до автоморфизмов графа и существует, если и только если n кратно 4.

5. Согласно лемме о среднем найдется 4-цикл, в котором не менее трех черных вершин. У одной из них два соседа черного цвета; противоречие. Следовательно, матрица A_5 не является допустимой для графа $P(n)$ ни при каких n . \square

Для лестницы Мебиуса справедлива

Теорема 2. *Допустимые матрицы второго порядка для лестницы Мебиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 при n , кратных 4;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_3 при четных n ;
4. A_4 при $n = 2p$, где p — нечетное число;
5. A_5 не является допустимой ни при каких n ;
6. A_6 при нечетных n .

Доказательство. Пп. 2–5 доказываются аналогично соответствующим пунктам теоремы 1, поэтому в подробном доказательстве нуждаются только пп. 1 и 6.

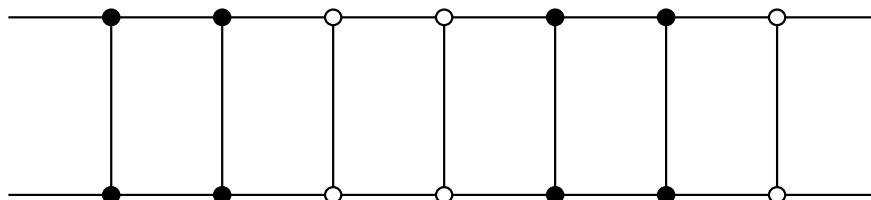


Рис. 4: Совершенная 2-раскраска лестницы Мебиуса

Пусть совершенная 2-раскраска графа $M(n)$ с матрицей параметров A_1 существует. Заметим, что во всяком 4-цикле четное число вершин одного цвета, иначе нашлась бы вершина с внешней степенью, большей 1. Более того, не могут все 4-циклы оказаться одноцветными. Значит, есть цикл с двумя черными и двумя белыми вершинами. Антиподальное расположение белых вершин противоречиво, поскольку внешняя степень не может быть больше двух. Легко убедиться в том, что из двух оставшихся вариантов расположения черных и

белых вершин в 4-цикле до совершенной 2-раскраски может быть продолжен лишь один, изображенный на рис. 4. Эта раскраска единственна и существует, если и только если n кратно 4.

Доказательство утверждения 6 оставляем читателю в качестве легкого упражнения. □

Обобщенный граф Петерсена

Граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер

$$E = \{(i, i + 1), (i, i + 2) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\} \cup \\ \{(i, i + 4) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ нечетное}\} \text{ (сложение по модулю } 2n)$$

называется *обобщенным графом Петерсена* $GP(n)$. Четные вершины графа $GP(n)$ назовем *нижними*, а нечетные — *верхними*.

Локальное строение обобщенного графа Петерсена $GP(n)$ показано на рис. 5.

Теорема 3. *Допустимые матрицы второго порядка для обобщенного графа Петерсена $GP(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 при любых n ;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_3 не является допустимой ни при каких n ;
4. A_4 не является допустимой ни при каких n ;
5. A_5 при n , кратных 5;
6. A_6 не является допустимой ни при каких n .

Доказательство. В силу рис. 6 и леммы 3 только пп. 3 и 4 нуждаются в доказательстве.

3. Цвета нижних вершин не могут чередоваться, поэтому найдется ребро, соединяющее две нижние вершины белого цвета (см. рис. 7с). Цвета 1-окрестности этого ребра все черные. Вершины, обозначенные X на рисунке, белые, поскольку соседствуют с парой черных, а вершины, обозначенные Y и

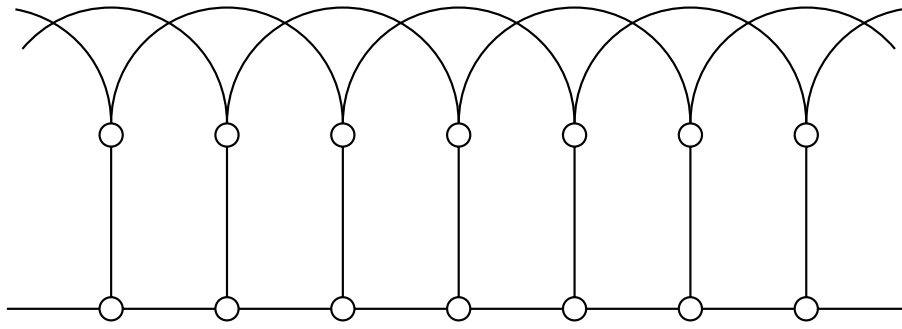


Рис. 5: Локальное строение обобщенного графа Петерсена

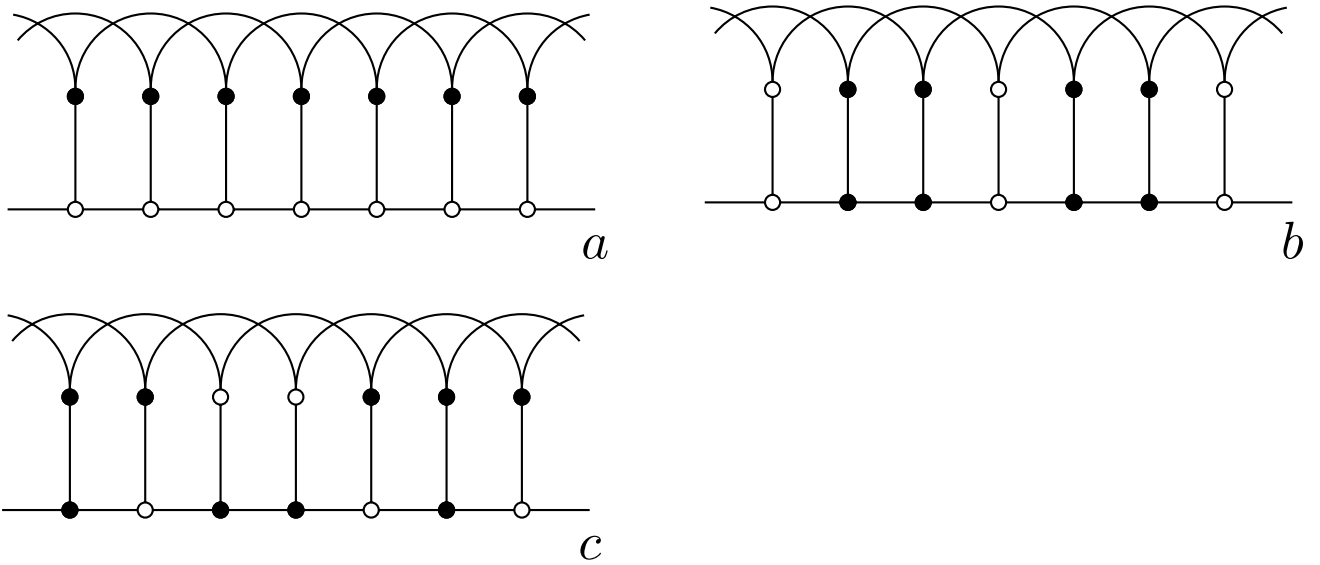
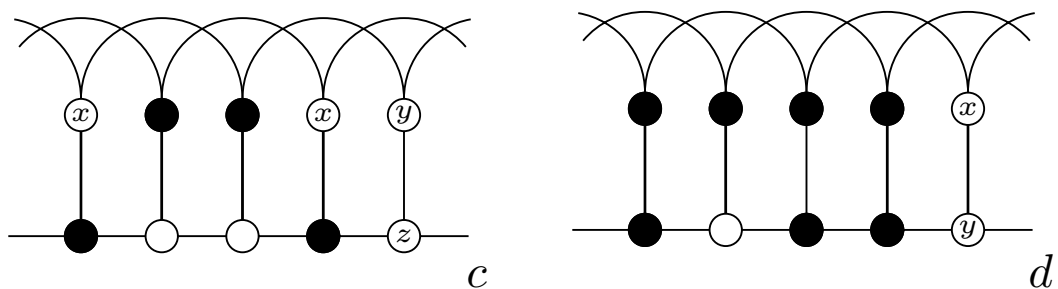


Рис. 6: Совершенные 2-раскраски обобщенного графа Петерсена

Z , черные, поскольку их соседи черного цвета уже видят по две белых вершины; противоречие.

4. Обязательно найдется нижняя белая вершина. В ее 2-окрестности не может быть других белых вершин (см. рис. 7 d). Заметим, что тогда вершины X и Y должны быть белыми, что приводит к противоречию.

Рис. 7: Недопустимость матриц A_3 и A_4 для обобщенного графа Петерсена

Скременная призма

Скременной призмой $CP(n)$ называется граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}$ и ребер

$$E = \{(i, i + 2) \mid i = \overline{0, 4n - 1}\} \cup \{(i, i + 3) \mid i = 4p, p = \overline{0, n - 1}\} \cup \{(i, i - 1) \mid i = 4p + 2, p = \overline{0, n - 1}\}$$
 (сложение по модулю $4n$).

Локальное строение скременной призмы показано на рис. 8.

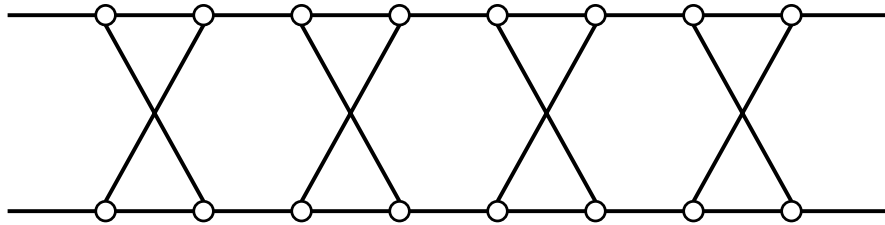


Рис. 8: Локальное строение скременной призмы

На рис. 1 диаграммами скременных призм являются диаграммы под номерами 5, 12 и 18.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Допустимые матрицы второго порядка для скременной призмы $CP(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 при любых n ;
2. A_2 не является допустимой ни при каких n ;
3. A_3 при любых n ;
4. A_4 при четных n ;
5. A_5 не является допустимой ни при каких n ;
6. A_6 при любых n .

Доказательство. В силу рис. 9 и леммы 3 в доказательстве нуждаются только пп. 2, 4 и 5.

2. Согласно лемме о среднем найдется 4-цикл с двумя белыми вершинами, причем соседними. В 2-окрестность этой пары попадают оба соседних 4-цикла, и все их вершины обязательно должны быть окрашены в черный цвет. Тогда для оставшихся двух вершин первоначального 4-цикла непротиворечивой раскраски не найдется.

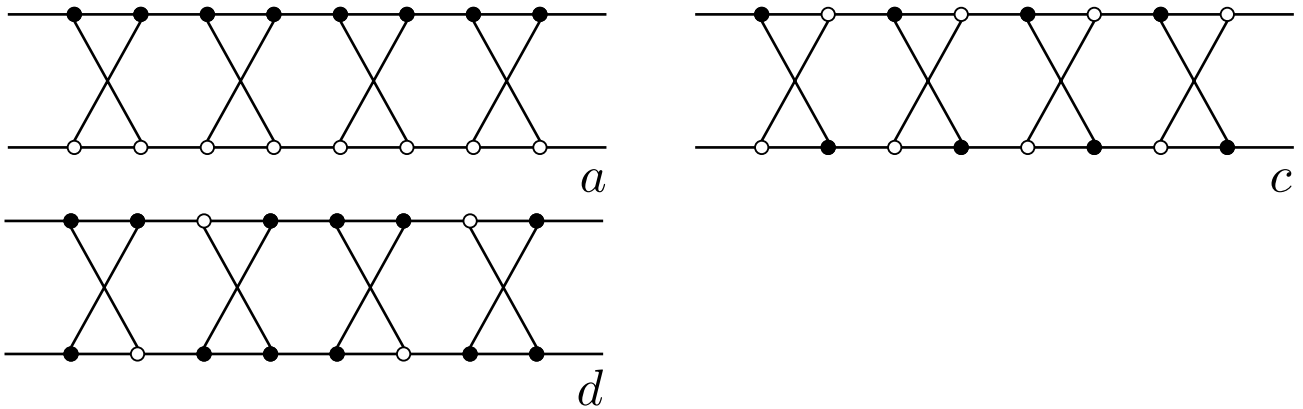


Рис. 9: Совершенные 2-раскраски скрещенной призмы

4. Никакой 4-цикл не может содержать две белые вершины. По лемме о среднем получается, что все 4-циклы содержат ровно одну белую вершину, причем для раскраски одного из соседних 4-циклов останется ровно один вариант (рис. 10). Таким образом, все 4-циклы разобьются на пары, что и означает четность n .

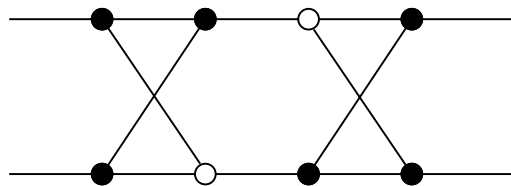


Рис. 10: Раскраска фрагмента скрещенной призмы

5. По лемме о среднем найдется 4-цикл с двумя белыми несмежными вершинами. В соседнем 4-цикле, ближайшем к этой паре белых вершин, все вершины должны быть окрашены в черный цвет; противоречие. \square

Хордальный цикл

Хордальный цикл $H(n)$ — это граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер

$$E = \{(i, i + 1) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\} \cup \{(i, i + 5) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\}$$

(сложение по модулю $2n$).

Локальное строение хордального цикла $H(n)$ показано на рис. 11.

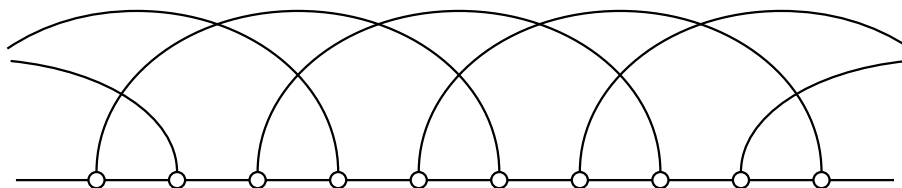


Рис. 11: Локальное строение хордального цикла

Теорема 5. Допустимые матрицы второго порядка для хордального цикла $H(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. A_1 при четных n ;
2. A_2 не является допустимой ни при каких n ;
3. A_3 при четных n ;
4. A_4 при n , кратных 4;
5. A_5 не является допустимой ни при каких n ;
6. A_6 при любых n .

Доказательство. В доказательстве нуждаются только пп. 2, 4 и 5, справедливость остальных пунктов следует из рис. 12 и леммы 3.

2. Заметим, что 2-окрестность каждого ребра, соединяющего пару белых вершин, может содержать только черные вершины. Поэтому всякий 6-цикл содержит не более двух белых вершин и, как следствие из леммы о среднем, ровно две. Все возможные варианты расположения двух соседних белых вершин в 6-цикле приведены на рис. 13. Каждый раз для вершины X не найдется подходящего цвета.

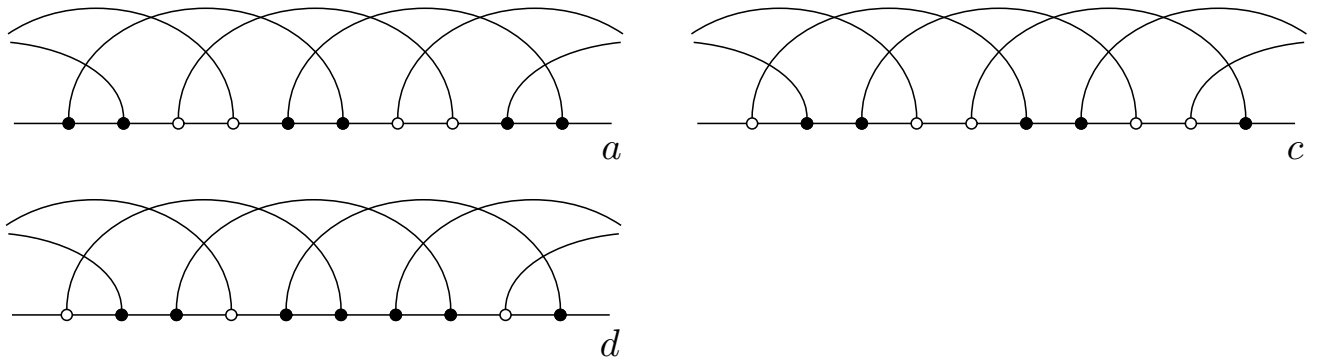
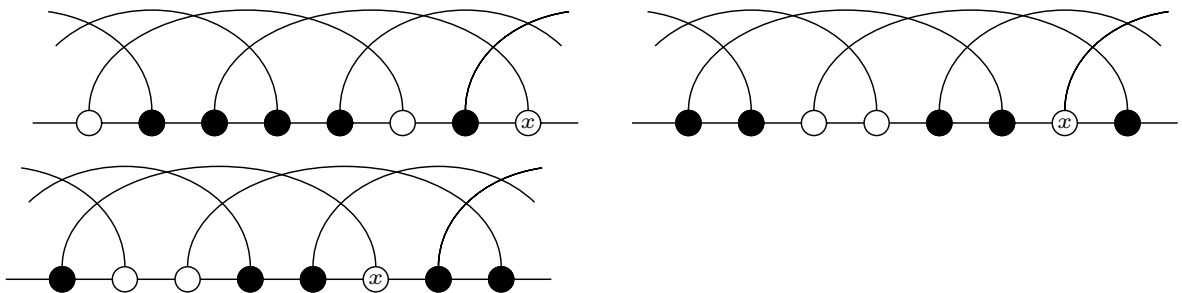
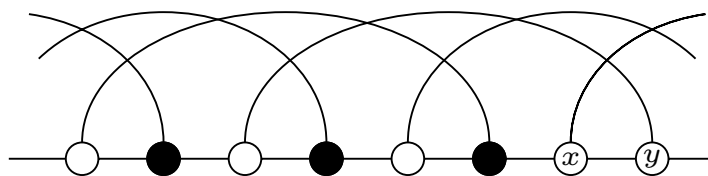


Рис. 12: Совершенные 2-раскраски хордального цикла

4. Каждая белая вершина является концом некоторого дугообразного ребра, замыкающего некоторый 6-цикл. Если в этом 6-цикле имеется еще одна белая вершина, то она находится на расстоянии 3 от первой. Другой вариант — дополнительных вершин нет. Оба варианта допустимы и однозначно продолжают друг друга до раскраски с периодом 8 (см. рис. 12d). Как следствие, n кратно 4.

Рис. 13: Недопустимость матрицы A_2 для хордального цикла

5. По лемме о среднем найдется 6-цикл с тремя белыми вершинами, которые обязаны чередоваться с черными (см. рис. 14). На рисунке вершина Y обязательно черная, а для X вариантов нет. Теорема 5 доказана. \square

Рис. 14: Недопустимость матрицы A_5 для хордального цикла

Усеченные кубические графы

В этом пункте речь пойдет об усеченных кубических графах и их совершенных 2-раскрасках. Условие транзитивности здесь не требуется.

Пусть G — произвольный кубический граф. Граф, полученный из графа G вставкой вместо каждой вершины треугольника (см. рис. 15), будем называть *усеченным графом* (*truncated graph*) и обозначать через $T(G)$. В некотором смысле граф $T(G)$ получен отсечением вершин графа G .

На рис. 1 диаграммы под номерами 11 и 23 являются диаграммами усеченных графов $M(2)$ и $M(3)$.

Основным результатом этого пункта является

Теорема 6. *Пусть G — произвольный кубический граф. Допустимые матрицы второго порядка для графа $T(G)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_6 допустима для графа G ;
2. A_2 допустима для графа $T(G)$, если и только если в G есть совершенное паросочетание;
3. A_3 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_3 допустима для графа G ;
4. A_4 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_4 допустима для графа G ;
5. A_5 не является допустимой ни для какого графа $T(G)$;
6. A_6 не является допустимой ни для какого графа $T(G)$.

Доказательство. Рассуждение будем вести в соответствии с нумерацией пунктов теоремы.

1. Легко понять, что все треугольники графа $T(G)$ одноцветны, иначе нашлась бы вершина с внутренней степенью меньше 2. Кроме того, соседние треугольники должны быть окрашены в разные цвета. Соответствующая раскраска вершин графа G правильная, что означает его двудольность. Аналогично в обратную сторону.

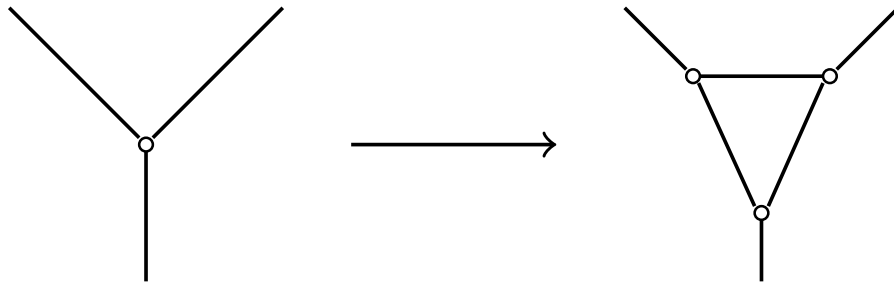


Рис. 15: Локальное строение усеченных кубических графов

2. Назовем ребра графа $T(G)$, соединяющие треугольники, *реликтовыми*. Все реликтовые ребра соединяют вершины одинакового цвета, поэтому им можно приписать соответствующий цвет. Вернувшись к графу G , обнаружим, что белые ребра в нем образуют совершенное паросочетание. Построить нужную раскраску графа $T(G)$, отправляясь от совершенного паросочетания в графе G , тоже нетрудно. Заметим также, что теорема Татта (см., например, [4]) гарантирует существование совершенного паросочетания в каждом транзитивном кубическом графе.

3. Опять воспользуемся раскраской реликтовых ребер. На этот раз появятся белые, черные и пестрые ребра. В совокупности белые и черные ребра образуют в графе G совершенное паросочетание, обладающее тем свойством, что ребра одного цвета не смежны между собой. А это как раз и означает раскраску графа G с матрицей A_3 . При переходе от графа G к графу $T(G)$ достаточно назначить цвета вершинам пестрых ребер, что происходит вполне однозначно.

4. Теперь в графе $T(G)$ реликтовые ребра приобретут два цвета: пестрый и черный. Вершину графа G покрасим в белый цвет, если ее окружают только черные ребра. В противном случае используем черный цвет. Легко убедиться в том, что полученная раскраска будет искомой. Обратный процесс тоже однозначный.

5. По лемме о среднем найдется треугольник с двумя белыми вершинами; противоречие.

6. Треугольник является нечетным циклом.

Стоит сказать, что однозначное соответствие раскрасок G и $T(G)$ другу другу означает заодно и равенство их количеств. Теорема 6 доказана. \square

Граф Паппа

Граф Паппа (Pappus graph) остался за рамками бесконечных серий. На рис. 1 его диаграммой является диаграмма под номером 24.

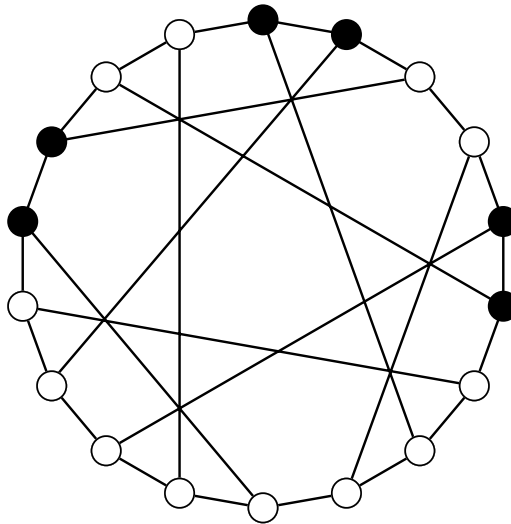


Рис. 16: Совершенная 2-раскраска графа Паппа

Теорема 7. *Допустимыми матрицами второго порядка для графа Паппа являются лишь матрицы A_2 и A_6 .*

Доказательство. Допустимость матрицы A_6 для графа Паппа очевидна. Рис. 16 подтверждает допустимость матрицы A_2 . Негативная часть теоремы немедленно следует из леммы 3. Теорема 7 доказана. \square

Таким образом полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок получено для шести бесконечных серий кубических графов и графа Паппа. Заметим, что полученные результаты носят предварительный характер. Следует отметить, что множество транзитивных кубических графов необозримо. Трудности перечисления совершенных раскрасок таких графов растут с ростом их обхвата, т.к. перестают работать методы, связанные с понятием локальной жесткости.

2 Совершенные раскраски призмы

В данной главе изучаются совершенные раскраски графов призмы и лестницы Мебиуса. Параграф 2.1 посвящен совершенным 3-раскраскам конечных призм $P(n)$ и лестниц Мебиуса $M(n)$, в параграфе 2.2 описаны все совершенные раскраски графа бесконечной призмы P_∞ в произвольное конечное количество цветов.

Заметим, что полное описание допустимых параметров совершенных 3-раскрасок конечных графов призм и лестниц Мебиуса может быть получено в качестве следствия параграфа 2.2. Выделение случая трех цветов в самостоятельный параграф объясняется тем, что результат для него получен применением техники, отличной от общего случая. В решении задачи полной характеристики матриц совершенных 3-раскрасок графов $P(n)$ и $M(n)$ большую роль играет гомоморфизм бесконечной прямоугольной решетки на тороидальный граф. Такая связь исследуемых графов с бесконечной прямоугольной решеткой позволяет использовать результаты, полученные для совершенных 3-раскрасок последней, и тем самым существенно сократить перебор.

А для того чтобы получить полное описание совершенных раскрасок графа P_∞ в любое конечное число цветов, используется концепция, получившая название принципа индуцирования. Идея принципа индуцирования опирается на двудольность исследуемого графа и в корне отличается от той идеи, которая используется в параграфе 2.1.

2.1 Совершенные 3-раскраски призмы и лестницы Мебиуса

Предварительные сведения

Для краткости, всюду в первом параграфе второй главы под матрицей допустимой для графа G будем понимать матрицу параметров некоторой совершенной 3-раскраски его вершин. Допустимые матрицы, полученные друг из

друга преобразованием, соответствующим переобозначению цветов, будем считать эквивалентными. Для того чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, в каждом классе эквивалентности допустимых матриц выберем представителя, отвечающего требованию лексикографической минимальности вектора $(m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{12}, m_{21}, m_{31})$. Заметим, что допустимая матрица восстанавливается по такому вектору однозначно, что гарантирует единственность такого представителя.

В решении задачи полной характеристики матриц, допустимых для конечных графов призм и лестниц Мебиуса, используются методы, описанные в первой главе диссертации, и результат работы [9]. Основная теорема [9], сформулированная ниже, позволяет существенно сократить перебор при решении поставленной задачи.

Теорема 8. *Матрицы, допустимые для графа бесконечной прямоугольной плоской решетки, исчерпываются следующим списком:*

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Такие инструменты, как лемма о среднем и техника локально жесткого фрагмента, введенные в главе 1, применимы для исследования совершенных

раскрасок графов $P(n)$ и $M(n)$ и в случае трёх цветов.

Прежде чем переходить к основным результатам параграфа, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6. *Если существует совершенная 3-раскраска конечной призмы $P(n)$ с матрицей параметров M , то существует совершенная 3-раскраска графа бесконечной прямоугольной плоской решетки с матрицей параметров $M + E$.*

Доказательство. Совершенная 3-раскраска конечной призмы $P(n)$ с матрицей параметров M естественным образом продолжается до совершенной 3-раскраски конечного тороидального графа, который является прямым произведением призмы $P(n)$ на ребро. Матрица параметров последней равна $M + E$. Совершенная 3-раскраска графа бесконечной прямоугольной плоской решетки с матрицей параметров $M + E$ получается из совершенной 3-раскраски конечного тороидального графа с той же матрицей параметров в результате применения отображения, обратного естественному гомоморфизму первого графа на второй. \square

Лемма 7. *Матрицами параметров совершенных 3-раскрасок конечной призмы $P(n)$ и лестницы Мёбиуса $M(n)$ могут быть только следующие 8 матриц:*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы для конечной призмы $P(n)$ немедленно следует из леммы 6 и теоремы 8.

Т.к. существование совершенной 3-раскраски лестницы Мёбиуса $M(n)$ с матрицей параметров M влечёт существование совершенной 3-раскраски призмы $P(2n)$ с той же матрицей параметров, утверждение леммы верно и для лестницы Мёбиуса. \square

Приведённые матрицы являются каноническими представителями своих классов эквивалентности в силу каноничности соответствующих им матриц совершенных раскрасок графа бесконечной прямоугольной плоской решетки [9].

Везде в дальнейшем используются именно эти обозначения для рассматриваемых матриц.

Пусть матрица M допустима для графа G . Число вершин цвета i в совершенной раскраске графа G с матрицей параметров M будем обозначать N_i . В силу допустимости матрицы M для рассматриваемого графа существуют попарно различные i, j и $k, 1 \leq i, j, k \leq 3$, для которых $m_{ij} \neq 0$ и $m_{ik} \neq 0$. Числом пропорциональности матрицы M назовём величину

$$pr(M) = [m_{ji}/(m_{ij}, m_{ji}), m_{ki}/(m_{ik}, m_{ki})](1 + m_{ij}/m_{ji} + m_{ik}/m_{ki}),$$

где (a, b) - наибольший общий делитель чисел a и b , а $[a, b]$ - их наименьшее общее кратное.

Лемма 8. Пусть G обыкновенный неориентированный граф. Если в матрице M , допустимой для графа G , выполнено $m_{ij} \neq 0$, то верно $N_i/N_j = m_{ji}/m_{ij}$.

Доказательство. Почти очевидно, поскольку вершины цветов i и j в G порождают бирегулярный двудольный граф со степенями долей m_{ij} и m_{ji} соответственно. \square

Лемма 9. Пусть задан граф G с N вершинами. Если матрица M допустима для графа G , то N кратно $pr(M)$.

Доказательство. Достаточно вычислить отношение величин $N_1 : N_2 : N_3$ для соответствующей совершенной раскраски, используя лемму 8. \square

Лемма 10. Пусть G кубический граф с N вершинами. Следующие ограничения на N являются необходимыми условиями допустимости матриц для графа G :

1. если матрица B_1 допустима для графа G , то N кратно 6;
2. если матрица B_4 допустима для графа G , то N кратно 3;
3. если матрица B_5 допустима для графа G , то N кратно 8;
4. если матрица B_6 допустима для графа G , то N кратно 3;
5. если матрица B_7 допустима для графа G , то N кратно 5.

Доказательство. В силу Леммы 9 в доказательстве нуждается только п. 3.

3. Пусть G - кубический граф и матрица B_5 допустима для него. Согласно лемме 8 для совершенной раскраски графа G с матрицей B_5 справедливо $N_1 : N_2 : N_3 = 1 : 1 : 2$. Вершин цвета 1, как и цвета 2, чётное число, так как внутренние степени этих цветов равны 1. Значит, необходимым условием допустимости матрицы B_5 для графа G является кратность N восьми. \square

В доказательстве каждой из теорем следующего пункта раскраски, изображённые на рисунках, подтверждают допустимость матриц, причем совершенной раскраске графа с матрицей параметров B_1 соответствует подпись a , с матрицей параметров B_2 — b и т. д. по аналогии с рисунками в первой главе. Вершины первого цвета представлены белыми, второго — серыми, а третьего — чёрными, в соответствии с возрастанием интенсивности цвета. Доказательство несуществования раскрасок опирается на доказанные выше леммы.

Основные результаты

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 9. Допустимые матрицы третьего порядка для конечной призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. B_1 при n кратных 6;
2. B_2 не является допустимой ни при каких n ;

3. B_3 при n , кратных 4;
4. B_4 при n , кратных 3;
5. B_5 при n , кратных 4;
6. B_6 при n , кратных 3;
7. B_7 при n , кратных 5;
8. B_8 при n , кратных 6;

Доказательство. В доказательстве нуждаются только пп. 1, 2, 3 и 8, справедливость остальных пунктов следует из рис. 17 и леммы 10.

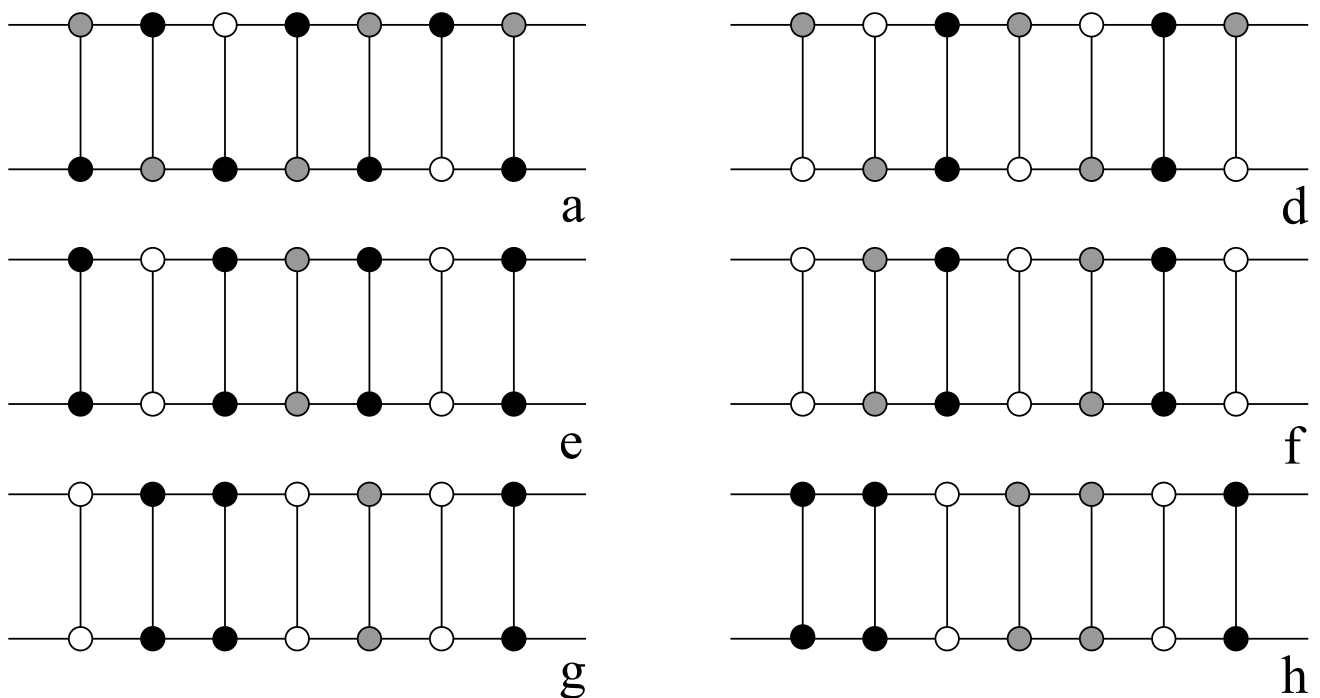


Рис. 17: Совершенные 3-раскраски конечной призмы

1. Заметим, что из совершенной 3-раскраски графа $P(n)$ с матрицей параметров B_1 получается его совершенная раскраска в 2 цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, если цвета 1 и 2 объединить в один. Необходимым условием существования последней является чётность n (см. теорему 1), что в совокупности с утверждением леммы 10 даёт следующее необходимое условие допустимости матрицы B_1 для графа $P(n)$: n кратно 6. Достаточность этого условия следует из рис. 17.

2. Рассуждая как в п. 1, заключаем, что существование совершенной 3-раскраски призмы $P(n)$ с матрицей параметров B_2 влечёт существование совершенной раскраски графа $P(n)$ в 2 цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Но последняя раскраска не существует (см. теорему 1), следовательно, матрица B_2 не является допустимой ни при каких n .

3. В силу леммы о среднем найдётся 4-цикл, в котором не менее двух вершин цвета 3. В 4-цикле более двух вершин этого цвета быть не может, иначе нашлась бы вершина цвета 3, у которой не менее двух соцветных соседей. Легко убедиться в том, что каждый из трёх вариантов расположения двух вершин цвета 3 в 4-цикле допустим и продолжается до одной из двух совершенных раскрасок с периодом 4 (рис. 18). Как следствие, n кратно 4.

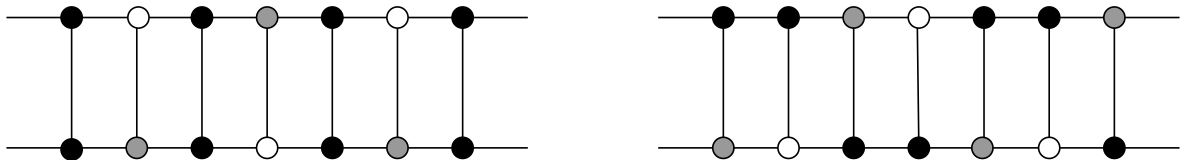


Рис. 18: Совершенные раскраски конечной призмы с матрицей параметров B_3 .

8. Пусть совершенная 3-раскраска графа $P(n)$ с матрицей параметров B_8 существует. Заметим, что во всяком 4-цикле чётное число вершин цвета 2, иначе нашлась бы вершина цвета 1 или 3, которая соседствует с более чем одной вершиной цвета 2. Не могут все 4-циклы, в каждом из которых хотя бы одна вершина покрашена цветом 2, оказаться одноцветными. Кроме того, в 4-цикле с двумя вершинами цвета 2 никакая вершина не может быть покрашена цветом 3. Значит, есть цикл с двумя вершинами цвета 2 и двумя вершинами цвета 1. Антиподальное расположение вершин цвета 1 в таком 4-цикле противоречиво, поскольку влечёт существование вершины этого цвета с более чем одним соседом цвета 2. Легко убедиться в том, что из двух оставшихся вариантов до совершенной 3-раскраски может быть продолжен лишь один, изображённый на рис. 17. Эта раскраска единственна и существует, если и только если n кратно 6. Теорема 9 доказана. \square

Теорема 10. *Допустимые матрицы третьего порядка для лестницы Мёбиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. B_1 при $n = 3p$, где p - нечётное число;
2. B_2 не является допустимой ни при каких n ;
3. B_3 при $n = 2p$, где p - нечётное число;
4. B_4 не является допустимой ни при каких n ;
5. B_5 при n , кратных 4;
6. B_6 при n , кратных 3;
7. B_7 при n , кратных 5;
8. B_8 при n , кратных 6.

Доказательство. Пп. 1-3 и 5-8 доказываются аналогично соответствующим пунктам теоремы 9, поэтому в подробном доказательстве нуждается только пункт 4.

4. Согласно лемме о среднем найдётся 4-цикл, в котором не менее двух вершин цвета 3. Кроме того, во всяком 4-цикле не более двух вершин этого цвета, в противном случае нашлась бы вершина, у которой не менее двух соседей цвета 3. По той же причине противоречиво антиподальное расположение вершин цвета 3 в 4-цикле с двумя вершинами этого цвета. Ни один из оставшихся вариантов расположения двух вершин цвета 3 в 4-цикле не может быть продолжен до совершенной 3-раскраски лестницы Мёбиуса с матрицей параметров B_4 , убедиться в этом читателю не составит труда. Следовательно, матрица B_4 не является допустимой для графа $M(n)$ ни при каких n . \square

2.2 Совершенные раскраски бесконечной призмы

Для того чтобы решить задачу характеристики совершенных раскрасок графов конечных призм и лестниц Мебиуса в произвольное конечное число цветов, рассматривается обобщение таких графов на случай счетного числа вершин — граф бесконечной призмы.

Дадим его формальное определение. Обозначим через C_∞ бесконечный граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а ребрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии 1. *Бесконечной призмой* P_∞ называется прямое произведение графа C_∞ на ребро. Для краткости, всюду во втором параграфе второй главы под графом призмы будем понимать граф бесконечной призмы.

На рис. 19 показано локальное строение призмы.

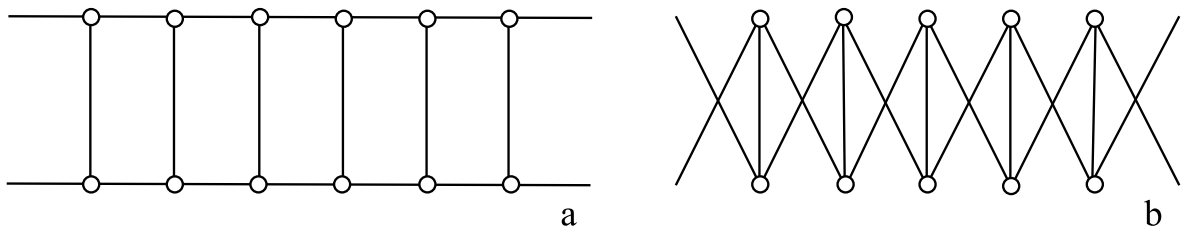


Рис. 19: Локальное строение призмы

Для исследования параметров совершенных раскрасок конечных призм в 2 и 3 цвета мы опирались на локальное строение призмы, изображенное на рис. 19,а (см. главу 1 и параграф 2.1). Для описания совершенных раскрасок графа бесконечной призмы существенно используется его двудольность, поэтому локальное строение в форме, представленной на рис. 19,б, оказывается более наглядным. Далее будем использовать именно его.

Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2 . Раскраску вершин одной доли графа G далее будем называть *полураскраской* этого графа. Полураскраска графа G называется *допустимой*, если существует совершенная раскраска вершин всего графа, частью которой она является. Две допустимые полураскраски графа G назовем *сопряженными*, если они дополняют друг друга до совершенной раскраски всего графа.

Далее всюду n – натуральное число. Если известны цвета вершин 4-цикла призмы и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на пару вершин соседнего 4-цикла и т.д. Т.к. число различных раскрасок 4-цикла в n цветов конечно для заданного n , то всякая совершенная раскраска исследу-

емого графа периодична. Таким образом, для описания совершенной раскраски графа P_∞ достаточно указать ее наименьший период. Записывать такой период будем таблицей размера $2 \times l$, где l – длина периода, первая строка таблицы соответствует раскраске верхней доли, вторая – нижней. Аналогичное утверждение справедливо и для допустимой полураскраски призмы. Ее период будем записывать заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов в которой равно длине периода.

Совершенную раскраску призмы будем называть *двудольной*, если множества цветов соответствующих полураскрасок не пересекаются. В противном случае множества цветов сопряженных полураскрасок совпадают. *Недвудольной* совершенной раскраской графа P_∞ назовем такую его совершенную раскраску, в которой совпадают множества цветов полураскрасок. Цвета верхней доли в записи двудольных совершенных раскрасок будем обозначать числами, а нижней – числами со штрихом или буквами. Числа будем использовать также для обозначения цветов недвудольных совершенных раскрасок.

Скажем несколько слов о логике доказательства основного результата данного параграфа. Доказательство состоит из двух частей. В первой части получено полное описание допустимых полураскрасок призмы. Множество допустимых полураскрасок графа P_∞ разбивается на два подмножества – стандартных и нестандартных полураскрасок. Строгие определения таких полураскрасок будут даны позднее.

Во второй части доказательства для каждой допустимой полураскраски найдены сопряженные ей дополнения в двудольном и недвудольном случаях. Множество совершенных раскрасок исследуемого графа разбивается на три подмножества: стандартные бесконечные серии, спорадические стандартные раскраски и нестандартные раскраски. Раскраски стандартных бесконечных серий получены из стандартных полураскрасок по шаблону, применимому ко всем таким полураскраскам. Подробное описание конструкций бесконечных серий совершенных стандартных раскрасок читатель найдет в пункте,

посвященном стандартным бесконечным сериям. Спорадическими мы называем раскраски, получаемые сопряжением стандартных полураскрасок, но не входящие в бесконечные серии. Наконец, нестандартные полураскраски порождают нестандартные совершенные раскраски призмы.

Допустимые полураскраски

Рассмотрим произвольный двудольный граф $G(V_1, V_2)$. Для произвольной полураскраски $f_1(v)$ первой доли определим индуцированную ею полураскраску второй доли следующим образом: вершины множества V_2 с одинаковым цветовым составом окружения окрашиваются одинаково, а имеющие разные цветовые составы – в разные цвета. При этом используются новые цвета, которых не было в начальной полураскраске. Результат будем считать полученным *операцией индуцирования*.

Для индуцированных раскрасок справедлива следующая лемма, идейно восходящая к [16].

Лемма 11. *(Об индуцировании) Полураскраска произвольного двудольного графа G допустима тогда и только тогда, если соответствующая ей индуцированная раскраска является совершенной.*

Доказательство. Индуцированная полураскраска второй доли графа по построению удовлетворяет условию совершенства. По определению допустимости существует некоторая совершенная раскраска графа G , совпадающая с данной на первой доле. Рассмотрим какие-либо две одинаково раскрашенные вершины V и W первой доли. Окружающие V вершины обозначим через V_1, V_2, \dots, V_d , а окружающие W через W_1, W_2, \dots, W_d . Не теряя общности, будем считать, что цвета вершин V_i и W_i совпадают для всех $i = 1, 2, \dots, d$. Но это означает, что цветовые составы вершин V_i и W_i в рассматриваемой совершенной раскраске одинаковы, а следовательно, цвета вершин V_i и W_i в индуцированной раскраске тоже совпадут. Значит цветовые составы вершин V и W в индуцированной раскраске одинаковы. Лемма 11 доказана. \square

Характеристическим циклом доли призмы назовем граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин этой доли, две вершины соединены ребром, если они принадлежат одному 4-циклу графа P_∞ . Допустимую полураскраску призмы будем называть *стандартной*, если она является совершенной раскраской своего характеристического цикла.

Полураскраски призмы с периодами $S_{11}(n) = [n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-3 \ n-2]$, $S_{12}(n) = [n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-2 \ n-1]$ и $S_{22}(n) = [n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-2 \ n-1]$ будем называть *зеркальными типом* $(1,1)$, $(1,2)$ и $(2,2)$ соответственно, а с периодами $S(n) = [0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-2 \ n-1]$ – *циклическими*. Тип зеркальной полураскраски определяется количеством вершин крайних цветов $(0$ и $n-1)$ в периоде.

Следующие две леммы содержат полное описание допустимых полураскрасок графа P_∞ .

Лемма 12. *Стандартные допустимые полураскраски призмы исчерпываются четырьмя бесконечными сериями: тремя сериями зеркальных полураскрасок и одной – циклических.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение леммы следует перечислить все совершенные раскраски графа C_∞ .

Если известны цвета двух смежных вершин этого графа и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на соседние с рассматриваемыми вершины и т.д. Т.к. число различных раскрасок двух смежных вершин в n цветов конечно для заданного n , то любая раскраска бесконечной цепи периодична. Всякой совершенной раскраске графа C_∞ с минимальным периодом длины k естественным образом можно поставить в соответствие совершенную раскраску цикла C_k .

Рассмотрим полученную раскраску k -цикла. Если для каждого цвета a окружение вершины этого цвета имеет одинаковый порядок цветов, то совершенная раскраска графа C_k имеет вид $[0 \ 1 \ 2 \ \dots \ k-2 \ k-1]$, т.е. является циклической. В случае если найдется цвет a^* такой, что две вершины этого цвета

имеют различный порядок цветов окружения, то существует подходящее n , для которого совершенная раскраска k -цикла имеет один из трех зеркальных типов: $[n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-3 \ n-2]$, $[n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-2 \ n-1]$ или $[n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ n-2 \ n-1]$.

Конструкции совершенных раскрасок, полученные для k -цикла, являются периодами совершенных раскрасок бесконечной цепи. Полукасраски призмы, соответствующие таким совершенным раскраскам характеристического цикла являются допустимыми в силу леммы 11. Лемма 12 доказана. \square

Лемма 13. *Допустимые полукасраски призмы исчерпываются четырьмя бесконечными сериями стандартных полукасрасок и двумя нестандартными полукасрасками – $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ и $[0 \ 0 \ 1 \ 2]$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую допустимую полукасраску призмы. Согласно лемме 11 для доказательства утверждения достаточно исследовать соответствующую ей индуцированную раскраску всего графа. За ρ обозначим минимальное расстояние между соцветными вершинами в соответствующей раскраске характеристического цикла. Цвет вершин, на которых это минимальное расстояние достигается, обозначим 0. Если таких цветов несколько – выберем любой из них. Утверждение леммы доказано перебором всех возможных значений параметра ρ . Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 2), где в записи фрагментов буквам соответствуют цвета отличные от 0, кроме того, разным буквам – разные цвета.

Значения параметра ρ в такой таблице записаны в первом столбце. Во втором столбце представлены фрагменты, которые обязательно встретятся в полукасраске при соответствующем значении ρ , назовем их *неизбежными*. После чего для каждого значения ρ перечислены все возможные продолжения неизбежного фрагмента, анализ любого из которых приводит либо к противоречию, либо к допустимой полукасраске. Результат такого анализа записан в последний столбец, где прочерк означает, что с данным продолжением допустимую полукасраску графа P_∞ получить нельзя.

Таблица 1: Схема доказательства леммы 13.

ρ	Неизбежный фрагмент	Продолжение	Совершенная раскраска
1	00	$a00a$ $a00b$ $a000a$ $a000b$ $0^n (n \geq 4)$	$S_{12}(n), S_{22}(n) (n \geq 2)$ [0 0 1 2] [0 0 0 1] – $S(1)$
2	0a0	$a0a0a$ $b0a0b$ $b0a0a$ $b0a0c$	$S_{11}(2)$ $S_{11}(n) (n \geq 3)$ – –
3	0ab0	$b0ab0$ $c0ab0c$ $c0ab0d$	$S(3)$ – –
≥ 4	$0a_1 \dots a_{\rho-1}0 (\rho \geq 4)$	$a_{\rho-1}0a_1 \dots a_{\rho-1}0a_1$	$S(\rho) (\rho \geq 4)$

Остановимся более подробно на доказательстве. Неизбежный фрагмент для $\rho = 1$ имеет вид 00 и допускает пять продолжений (см. таблицу 2).

Рассмотрим первое продолжение – $a00a$. В раскраске призмы, индуцированной такой полураскраской, вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, соцветны. Так как цветовые составы окружения вершин цвета 0 совпадают, то полураскраска нижней доли продолжается одинаково влево и вправо на одну вершину:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & 0 & a & \dots \\ \dots & y & x & x & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Анализируя окружения крайних вершин, продолжаем фрагмент влево и вправо симметрично. Из последнего замечания и того, что ρ принимает значение 1, следует: рассматриваемое продолжение – часть одной из зеркальных полураскрасок $S_{12}(n)$ или $S_{22}(n)$ ($n \geq 2$).

В индуцированной раскраске продолжения $a00b$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены разными цветами, так как имеют разный цветовой состав окружения. Полураскраска нижней доли продолжается однозначно влево и вправо на одну вершину, так как цветовой состав окружения

0-окрашенных вершин известен:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & 0 & b & \dots \\ \dots & z & x & y & z & \dots \end{pmatrix}.$$

Рассматривая окружения вершин цвета z , продолжаем полураскраску верхней доли влево и вправо цветами b и a соответственно. Полученный фрагмент однозначно восстанавливается до совершенной раскраски графа P_∞ с периодом полураскраски верхней доли $[0\ 0\ b\ a]$. После переобозначения цветов получаем $- [0\ 0\ 1\ 2]$.

Нетрудно заметить, что продолжения $a000a$ и 0^n ($n \geq 4$) однозначно восстанавливаются до допустимых полураскрасок с периодами $[0\ 0\ 0\ a] = [0\ 0\ 0\ 1]$ и $S(1)$ соответственно, а продолжение $a000b$ – противоречиво.

Для $\rho = 2$ неизбежный фрагмент имеет вид $0a0$ и допускает четыре продолжения.

В индуцированной раскраске продолжения $a0a0a$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены одинаково. Так как цветовой состав окружения a -окрашенных вершин известен, полураскраску нижней доли можно продолжить вправо двумя способами:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & & y & x & y & x & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & a & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & & y & x & y & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Первый вариант однозначно восстанавливается до $S_{11}(2)$. Продолжая второй, приходим к противоречию.

Рассмотрим следующее продолжение $- b0a0b$. Вершины, лежащие напротив 0-окрашенных в индуцированной раскраске призмы, соцветны. Так как цветové составы окружения вершин цвета 0 совпадают, то полураскраска нижней доли продолжается одинаково влево и вправо на одну вершину. Возможны два случая:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & b & \dots \\ \dots & & y & y & x & y & y & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & b & \dots \\ \dots & & z & y & x & y & z & \dots \end{pmatrix}.$$

Продолжая первый фрагмент, приходим к противоречию. Второй же фрагмент влево и вправо продолжается симметрично. В силу последнего замечания и того, что $\rho = 2$, заключаем: такое продолжение – часть зеркальной полураскраски типа $S_{11}(n)$ ($n \geq 3$).

В индуцированной раскраске продолжения $b0a0a$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены разными цветами, так как имеют разный цветовой состав окружения. Полураскраска нижней доли продолжается однозначно влево и вправо на одну вершину, так как цветовой состав окружения 0-окрашенных вершин известен:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & z & y & x & z & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Анализируя окружения вершин цвета z , заключаем: $a = b$. Пришли к противоречию, значит, в этом случае допустимую полураскраску графа P_∞ получить нельзя.

Для продолжения $b0a0c$ доказательство аналогично случаю $b0a0a$.

При $\rho = 3$ неизбежный фрагмент имеет вид $0ab0$ и может встретиться в одной из следующих трех комбинаций: $b0ab0$, $c0ab0c$ или $c0ab0d$.

Рассмотрим первую комбинацию. Фрагмент раскраски графа P_∞ , индуцированный ею, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & & x & x & x & & \dots \end{pmatrix}.$$

Так как в окружении 0-окрашенной вершины есть две вершины цвета x , полураскраску нижней доли можно продолжить двумя способами:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & & x & x & x & x & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & & x & x & x & x & \dots \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\rho = 3$, анализ окружения x -окрашенных вершин позволяет однозначно продолжить оба фрагмента до совершенной раскраски призмы с полураскраской верхней доли типа $S(3)$.

Запишем теперь фрагмент, индуцированный второй комбинацией:

$$\begin{pmatrix} \dots & c & 0 & a & b & 0 & c & \dots \\ \dots & & y & x & x & z & & \dots \end{pmatrix}.$$

Последовательно анализируя окружения вершин цветов 0 , y и a , продолжаем такой фрагмент до следующего:

$$\begin{pmatrix} \dots & c & 0 & a & b & 0 & c & a & \dots \\ \dots & & z & y & x & x & z & y & x & \dots \end{pmatrix}.$$

Так как цветовой состав окружения различных вершин цвета x не одинаков, такой фрагмент не может быть частью совершенной раскраски призмы. Значит, продолжение $c0ab0c$ не может быть частью никакой допустимой полураскраски.

Для комбинации $c0ab0d$ доказательство аналогично случаю $c0ab0c$.

Пусть $\rho \geq 4$. Неизбежный фрагмент для такого ρ имеет вид $0a_1 \dots a_{\rho-1}0$. В раскраске призмы, индуцированной таким фрагментом, вершины, расположенные напротив вершин цветов a_i ($i = \overline{1, \rho-1}$), окрашены разными цветами:

$$\begin{pmatrix} \dots & 0 & a_1 & \dots & a_{\rho-1} & 0 & \dots \\ \dots & & x_1 & \dots & x_{\rho-1} & & \dots \end{pmatrix}$$

Анализ окружения вершин цвета 0 делает очевидным следующий факт: в раскраске призмы правый сосед крайней справа вершины этого цвета окрашен x_1 . Так как минимальное расстояние между соцветными вершинами равно ρ , цветовой состав окружения вершин цветов 0 и x_i ($i = \overline{1, \rho-1}$) восстанавливается однозначно, как и совершенная раскраска всего графа. Период верхней доли в такой раскраске имеет вид $S(\rho)$ ($\rho \geq 4$). Лемма 13 доказана. \square

Следствие 1. *Допустимая полураскраска призмы в более чем три цвета является либо циклической, либо зеркальной.*

Стандартные бесконечные серии

В этом пункте будет дано описание операций, позволяющих из стандартных полураскрасок призмы получать совершенные раскраски всего графа.

Пусть $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ — множество цветов полураскраски верхней доли графа P_∞ . Для раскраски нижней доли будем использовать цвета из множества $Z'_n = \{0', 1', 2' \dots (n-1)'\}$. Каждую вершину нижней доли, расположенную напротив вершины цвета 0, покрасим цветом $0'$ (аналогично, для вершин цвета 1 — цветом $1'$ и т. д.). Определенную таким образом двудольную раскраску будем называть *штрих-дублированной*.

Пусть верхняя доля призмы покрашена стандартно. Нетрудно видеть, что соответствующая штрих-дублированная раскраска всего графа будет совершенной.

Двудольную совершенную раскраску призмы будем называть стандартной, если она получена применением операции штрих-дублирования к некоторой стандартной полураскраске. Заметим, что результаты применения операций штрих-дублирования и индуцирования к стандартной полураскраске в более чем три цвета совпадают.

Недвудольную совершенную раскраску графа P_∞ считаем стандартной, если она получена сопряжением двух одинаковых стандартных полураскрасок (одна может быть переведена в другую некоторым сдвигом и, возможно, отражением).

Следующие две леммы содержат полное описание стандартных раскрасок графа P_∞ .

Лемма 14. *Бесконечные серии стандартных двудольных раскрасок призмы исчерпываются следующим списком:*

1. одна бесконечная циклическая серия:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0' & 1' & 2' & \dots & (n-2)' & (n-1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

2. три бесконечные зеркальные серии:

$$B = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ (n-1)' & (n-2)' & \dots & 1' & 0' & 1' & \dots & (n-3)' & (n-2)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$C = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ (n-1)' & (n-2)' & \dots & 1' & 0' & 1' & \dots & (n-2)' & (n-1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$D = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ (n-1)' & (n-2)' & \dots & 1' & 0' & 0' & 1' & \dots & (n-2)' & (n-1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n.$$

Справедливость сформулированной леммы сразу следует из определения стандартной двудольной раскраски исследуемого графа.

Лемма 15. *Бесконечные серии стандартных недвудольных раскрасок призмы исчерпываются следующим списком:*

1. пять бесконечных циклических серий:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t-1 & t & \dots & 2t-3 & 2t-2 \\ 0 & 2t-2 & 2t-3 & \dots & t & t-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t-1;$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t-1 & t & t+1 & \dots & 2t-2 & 2t-1 \\ 0 & 2t-1 & 2t-2 & \dots & t+1 & t & t-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t & t+1 & \dots & 2t-2 & 2t-1 \\ 1 & 0 & 2t-1 & \dots & t+1 & t & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & t-1 & t & t+1 & \dots & 2t-2 & 2t-1 \\ t & t+1 & \dots & 2t-1 & 0 & 1 & \dots & t-2 & t-1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

2. пять бесконечных зеркальных серий:

$$J = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$K = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$L = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$M = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$N = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ при любых } n.$$

Доказательство. Совершенные раскраски E , J , L и M получены дублированием допустимой полураскраски верхней доли на нижнюю, а раскраски F , G и H – зеркальным отражением копии циклической раскраски верхней доли в нижней относительно некоторой оси. Из циклических полураскрасок верхней доли с периодом четной длины можно получить совершенную раскраску I сдвигом ее дубликата в нижней доле на половину периода. Раскраска K – результат циклического сдвига продублированной зеркальной полураскраски типа (1,1) на $n-1$ позицию. Циклический сдвиг дубликата зеркальной полураскраски типа (2,2) верхней доли в нижней на n позиций порождает совершенную раскраску N .

Согласно лемме 12 в доказательстве нам достаточно рассмотреть четыре случая: циклический и три зеркальных.

Начнем с циклического случая. По определению стандартной недвудольной раскраски призмы сопряженная полураскраска нижней доли может быть получена из верхней циклическим сдвигом и/или зеркальным отражением относительно некоторой оси. Таким образом, напротив каждого цвета i ($0 \leq i \leq n-1$) находится его образ $\varphi(i)$. Пусть $m = \min_i |i - \varphi(i)|$. Не теряя общности, полагаем, что $m = |0 - \varphi(0)|$. Пусть $m = 0$. Последовательно анализируя окружения

вершин цветов 0, 1, 2 и т.д., получаем одну из трех совершенных раскрасок – E , F или G . Рассматривая окружения вершин цветов 0 и 1 в случае $m = 1$, получаем три фрагмента – два для $n \neq 3$:

$$\begin{pmatrix} \dots & n-1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 2 & 1 & 0 & n-1 & \dots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \dots & n-1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 0 & n-1 & \dots \end{pmatrix},$$

и один для $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} \dots & 2 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Первый вариант продолжается до стандартной совершенной раскраски H , а второй и третий – до спорадических раскрасок с периодами $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно.

Пусть $m > 1$. Т.к. $m = \min_i |i - \varphi(i)| = |0 - \varphi(0)|$, то сопряженная полураскраска, может быть получена из верхней полураскраски только циклическим сдвигом на k позиций. Очевидно, $k > 1$. Тогда нижняя полураскраска дополняет верхнюю до следующей раскраски всего графа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 \\ n-k & n-k+1 & n-k+2 & \dots & n-1 & 0 & 1 & \dots & n-k-1 \end{pmatrix}.$$

Здесь сумма и разность соответствуют сумме и разности по модулю n . Рассмотрим окружение вершины цвета 0: $\{n-k-1, n-k, n-k+1\} = \{k-1, k, k+1\}$. Т.к. $k > 1$, последнее равенство верно для $k = \frac{n}{2}$ при четных n больших 3 (см. совершенную раскраску I) и для $n = 3$ с $k = 2$. Совершенная раскраска, соответствующая $n = 3$ и $k = 2$, является спорадической: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнения зеркальных полураскрасок в n цветов до стандартных раскрасок призмы в недвудольном случае могут быть получены только циклическим сдвигом. Пусть полураскраска верхней доли графа P_∞ является зеркальной типа $(1,1)$. Рассмотрим циклический сдвиг ее копии в нижней доле на k позиций.

Описанные полураскраски дополняют друг друга до совершенной раскраски призмы, если окружения вершин цвета 1 верхней доли совпадают, т.е. цвета вершин x и y совпадают с цветами вершин z и t :

$$\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & x & y & z & t & \dots & \end{pmatrix}.$$

Такое условие выполнено только для $k = 0$ и $k = n-1$ при любых n . Если сдвиг отсутствует, получается совершенная раскраска J , а при сдвиге на $n-1$ позицию – K .

Рассуждая аналогично, заключаем: дополнения зеркальной полураскраски типа (1,2) допустимы при циклическом сдвиге исходной полураскраски на $k = 0$ позиций при любых n (см. совершенную раскраску L). А при $n = 2$ совершенная раскраска призмы получается также циклическим сдвигом полураскраски $[1\ 0\ 1]$ на одну позицию: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Такая раскраска является спорадической стандартной раскраской.

Рассмотрим зеркальную полураскраску типа (2,2) верхней доли призмы. Выполним циклический сдвиг ее копии в нижней доле на k позиций. Для того чтобы полученная полураскраска была дополнением исходной до совершенной раскраски призмы необходимо, чтобы цветовой состав окружений вершин цвета 0, расположенных в верхней доле совпадал, т.е. вершины, обозначенные буквой a , должны быть окрашены одним цветом:

$$\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ & & & \dots & a & & a & \dots & \end{pmatrix}.$$

Это условие выполняется лишь для $k = 0$ и $k = n$ при всех n . Циклический сдвиг на 0 и n позиций порождает дополнения полураскраски типа (2,2) до совершенных раскрасок M и N соответственно.

Лемма 15 доказана. □

Основные результаты

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 11. *Двудольные совершенные раскраски призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;
2. четыре спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & b \end{pmatrix};$$

3. две нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & c \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно определению и лемме 11 операция индуцирования продолжает всякую допустимую полураскраску до двудольной совершенной раскраски в минимальное количество цветов. Значит, любая двудольная совершенная раскраска призмы, содержащая заданную допустимую полураскраску, либо является индуцированной, либо получается из индуцированной расщеплением цветов второй доли. Т.к. обе доли в совершенной раскраске призмы окрашены допустимо, организуем перебор всех совершенных раскрасок призмы так, чтобы число цветов в допустимой полураскраске второй доли не превосходило числа цветов в первой.

Нетрудно убедиться в том, что индуцированные дополнения лишь двух стандартных полураскрасок – $[0 \ 0 \ 1]$ и $[0 \ 1 \ 2]$ – отличаются от своих штрих-дублированных дополнений и имеют следующий вид ($a \notin \{0, 1, 2\}$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Такие совершенные раскраски призмы являются спорадическими стандартными раскрасками.

Заметим, что расщепление цвета a на два цвета дает еще две неэквивалентные спорадические раскраски исследуемого графа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & b \end{pmatrix}.$$

Согласно условиям перебора других спорадических стандартных раскрасок в двудольном случае нет.

Индукцированные дополнения нестандартных полураскрасок $[0\ 0\ 0\ 1]$ и $[0\ 0\ 1\ 2]$ содержат 2 и 3 цвета соответственно и согласно условиям перебора расщепления цветов не допускают. Теорема 11 доказана. \square

Теорема 12. *Недвудольные совершенные раскраски призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;
2. три спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

3. три нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 15 в доказательстве нуждается только п.3.

Напомним, что нестандартные раскраски призмы – результат сопряжения ее нестандартных полураскрасок, и множества цветов сопряженных полураскрасок совпадают в недвудольных совершенных раскрасках графа P_∞ . С учетом циклического сдвига и зеркального отражения полураскраски одной доли относительно другой возможны двенадцать вариантов такого сопряжения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрев окружения вершин каждого цвета в этих раскрасках, заключаем, что совершенными являются только следующие три:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 12 доказана. □

Данный параграф завершает изучение совершенных раскрасок призмы и лестницы Мёбиуса. В нем описаны все совершенные раскраски для графа бесконечной призмы P_∞ . Совершенные раскраски для конечных графов призмы $P(n)$ и лестниц Мёбиуса $M(n)$ могут быть получены из них в качестве следствия. Метод локально жестких фрагментов, использованный для изучения совершенных раскрасок упомянутых графов в 2 и 3 цвета, в случае произвольного числа цветов оказывается малоэффективным. В этом случае работают методы, опирающиеся на двудольность исследуемого графа, в частности, лемма об индуцировании.

Отметим, что в параграфе 2.2 получено полное описание совершенных раскрасок не только графа бесконечной призмы, но также графа C_∞ .

3 Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2

Определения и обозначения

Эта глава посвящена совершенным раскраскам графа $Ci_\infty(2)$.

Напомним читателю основные определения. *Бесконечным циркулянтным графом с дистанциями d_1, d_2, \dots, d_n , $d_i \in \mathbb{Z}$* называется граф $Ci_\infty(d_1, \dots, d_n)$, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, для любой вершины множество инцидентных ей ребер имеет вид:

$$\{\{v, v \pm d_i\} \mid i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Любая совершенная раскраска графа $Ci_\infty(d_1, \dots, d_n)$ является периодической [13], значит, для описания совершенной раскраски достаточно указать ее наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов в которой равно длине периода.

Циркулянтным графом длины t с дистанциями d_1, d_2, \dots, d_n называется псевдограф $C_t(d_1, d_2, \dots, d_n)$, множество вершин которого совпадает с множеством элементов группы Z_t , для любой вершины мультимножество инцидентных ей ребер имеет вид

$$\{\{v, v \pm d_i \bmod t\} \mid i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Отметим, что существует взаимнооднозначное соответствие между совершенной раскраской графа $Ci_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ с периодом длины t и совершенной раскраской конечного циркулянта $Ci_t(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Рассмотрим случай $d_i = i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Граф $Ci_\infty(n) := Ci_\infty(1, 2, \dots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций*. Соответствующий ему циркулянтный граф длины t обозначим $Ci_t(n)$. На рис. 20 показано локальное строение графа $Ci_\infty(2)$, диаграмм-

мы графов $Ci_4(2)$, $Ci_5(2)$ и $Ci_6(2)$ изображены на рис. 21.

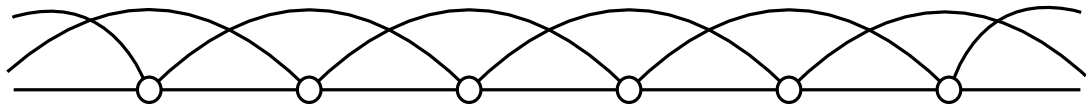


Рис. 20: Локальное строение графа $Ci_\infty(2)$

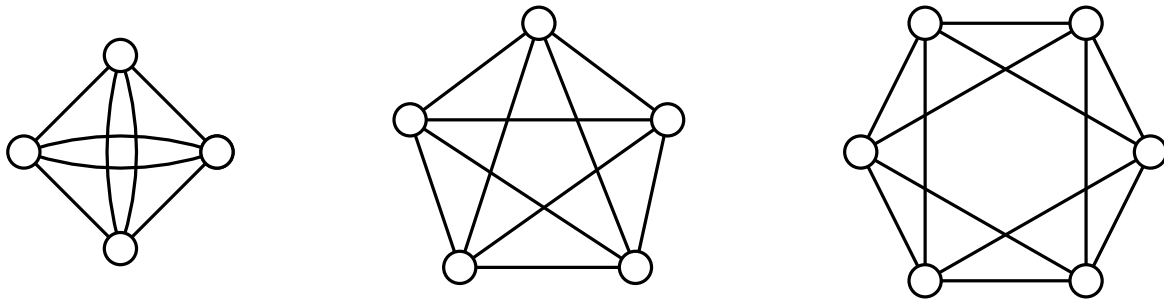


Рис. 21: Диаграммы графов $Ci_4(2)$, $Ci_5(2)$ и $Ci_6(2)$

Доказательство основного результата главы выполнено перебором. Введем новые понятия, чтобы сократить перебор.

Далее всюду k — натуральное число, $k \geq 1$. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами*. Пусть $G(V, E)$ — простой граф, а отображение $\phi : V \rightarrow I$ является его совершенной раскраской. Мультимножество цветов окружения вершины v цвета a в совершенной раскраске ϕ назовем *палитрой* цвета a .

Определим на множестве V *характеристическую функцию* цвета i в совершенной раскраске ϕ следующим образом:

$$\phi_i(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi(v) = i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Раскраску вершин графа G , полученную таким образом из совершенной раскраски ϕ , назовем $(0, 1)$ -разметкой.

Исследуя свойства циркулянтных графов, удобно под расстоянием между

двумя вершинами понимать расстояние в \mathbb{Z} . Заметим, что такое определение отличается от принятого в теории графов.

Определив все необходимые понятия, опишем, как организован перебор. В каждой совершенной раскраске графа $Ci_\infty(n)$ выберем цвет, расстояние между вершинами которого минимально. Если таких цветов несколько, выберем любой из них. Записав характеристическую функцию этого цвета в рассматриваемой раскраске, получим некоторую $(0,1)$ -разметку. Доказательство основного результата текущей главы выполнено путем перебора возможных минимальных расстояний между 1-окрашенными вершинами в последней. Сократить перебор позволяют некоторые вспомогательные утверждения, которые будут сформулированы и доказаны далее.

Конструкции совершенных раскрасок

Раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами $S_{11}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$, $S_{12}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2]$ и $S_{22}(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1]$ будем называть *зеркальными* типов 1-1, 1-2 и 2-2 соответственно, а с периодами $S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ k]$ — *циклическими*. Тип зеркальной раскраски определяется количеством вершин крайних цветов (1 и k) в периоде.

Утверждение следующей леммы очевидно.

Лемма 16. *Раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами $S_{11}(k)$, $S_{12}(k)$, $S_{22}(k)$ и $S(k)$ являются совершенными для любых натуральных n и k ($n \geq 1, k \geq 1$).*

Циклические и зеркальные совершенные раскраски далее будем называть *стандартными*. Стандартность таких раскрасок отражает следующий факт. Циклические и зеркальные раскраски могут быть получены как результат применения орбитного метода, который является основным способом построения совершенных раскрасок графов.

Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(n)$ с длинами периодов $2n$, $2n+1$ и $2n+2$, которые не являются стандартными, назовем *нестандартными*. Значит, для характеристики нестандартных раскрасок бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций достаточно описать совершенные раскраски графов $Ci_{2n}(n)$, $Ci_{2n+1}(n)$ и $Ci_{2n+2}(n)$ и исключить из полученных периодов стандартные.

Граф $Ci_{2n+1}(n)$ является полным графом с $2n+1$ вершинами. По определению совершенной раскраски любая раскраска его вершин является совершенной.

Рассмотрим циркулянтный граф длины $2n$ со сплошным набором n дистанций. Граф $Ci_{2n}(n)$ — это граф K_{2n} с дополнительными ребрами, соединяющими вершины на расстоянии n . Заметим, что такие ребра образуют совершенное паросочетание в исследуемом графе. Значит, раскраска конечного циркулянта $Ci_{2n}(n)$ совершенна тогда и только тогда, когда она является совершенной раскраской такого паросочетания. Задача описания совершенных раскрасок графа $Ci_{2n}(n)$, таким образом, сводится к исследованию совершенных раскрасок паросочетаний.

Пусть $M = (V, E)$ — граф совершенного паросочетания на множестве вершин V . Построим раскраску его вершин в k цветов. Для этого множество цветов $I = \{1, 2, \dots, k\}$ разобьем на два непересекающихся подмножества I_1 и I_2 так, чтобы $|I_2| = 2l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Цвета множества I_2 разобьем на пары: $(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)$, $i = 1, \dots, l$. Концы каждого элемента паросочетания красим одним из двух доступных способов: одинаково — цветом α ($\alpha \in I_1$) или цветами α_i и $\bar{\alpha}_i$, где $(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)$ — пара из разбиения I_2 . Описанную конструкцию назовем *антиподальной* раскраской паросочетания.

В следующей очевидной лемме описаны все совершенные раскраски паросочетания.

Лемма 17. Пусть $M = (V, E)$ — граф совершенного паросочетания на множестве вершин V . Раскраска его вершин $\phi : V \rightarrow I$ является совершенной

раскраской тогда и только тогда, когда она антиподальна.

Следовательно, совершенные раскраски конечного циркулянта $Ci_{2n}(n)$ исчерпываются антиподальными раскрасками соответствующего совершенного паросочетания.

Случай $Ci_{2n+2}(n)$ аналогичен предыдущему, т.к. граф $Ci_{2n+2}(n)$ представляет собой граф K_{2n+2} , из которого удалено совершенное паросочетание.

Описание совершенных раскрасок графа $Ci_{\infty}(n)$ с периодами $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$, таким образом, завершено. Исключив из этих раскрасок стандартные, получим множество его нестандартных совершенных раскрасок.

Применив полученные результаты к случаю $n = 2$, охарактеризуем все нестандартные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2:

Лемма 18. *Нестандартные раскраски графа $Ci_{\infty}(2)$ с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующими пятнадцатью раскрасками:*

$$\begin{aligned} N_1 &= [11112], & N_2 &= [11122], & N_3 &= [11212], & N_4 &= [11123], & N_5 &= [11213], \\ N_6 &= [11223], & N_7 &= [12123], & N_8 &= [11234], & N_9 &= [12134], & N_{10} &= [111222], \\ N_{11} &= [112113], & N_{12} &= [123145], & N_{13} &= [112334], & N_{14} &= [123124], \\ N_{15} &= [121323]. \end{aligned}$$

Напомним, что в [22] выдвинута гипотеза о том, что все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа $Ci_{\infty}(n)$ исчерпываются стандартными бесконечными сериями и нестандартными совершенными раскрасками. Отметим, что совершенные раскраски графа $Ci_{\infty}(1)$ исчерпываются четырьмя бесконечными сериями стандартных раскрасок (см. лемму 12), что подтверждает гипотезу в случае $n = 1$, т.к. все совершенные раскраски такого графа с периодами длины 2, 3 и 4 являются стандартными. В этой главе доказано, что гипотеза верна в случае $n = 2$. Для $n > 2$ она не подтверждена и не опровергнута.

Предварительные сведения

Далее сформулированы и доказаны несколько утверждений о совершенных раскрасках бесконечных циркулянтных графов, позволяющие сократить перебор в доказательстве основного результата этой главы.

Следующие две леммы посвящены свойствам графа $Ci_\infty(n)$.

Лемма 19. Пусть в совершенной раскраске графа $Ci_\infty(n)$ в k цветов встречается фрагмент xx , где $x \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда вершины, находящиеся на расстоянии n от такого фрагмента, окрашены одинаково.

Доказательство. Окружения вершин цвета x в таком фрагменте отличаются лишь вершинами, находящимися на расстоянии n от него. Т.к. рассматриваемая раскраска является совершенной, цвета таких вершин совпадают. \square

Лемма 20. Рассмотрим совершенную раскраску графа $Ci_\infty(n)$. Пусть наименьшее расстояние между соцветными вершинами в такой раскраске равно k и $k > 2n$, тогда раскраска является циклической раскраской в k цветов.

Доказательство. Рассмотрим совершенную раскраску исследуемого графа, удовлетворяющую условиям леммы. В ней найдется фрагмент вида $1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ 1$, где $k > 2n$, 1 обозначает цвет, минимальное расстояние между вершинами которого является наименьшим, и $1 \notin \{2, \dots, k\}$. Все цвета в множестве $\{2, \dots, k\}$ различны в силу минимальности k . Значит, вершина цвета 1 имеет следующий цветовой состав окружения: $\{2, 3, \dots, n, n+1, k-n+1, \dots, k\}$. Учитывая минимальность k , продолжаем рассматриваемый фрагмент вправо следующим образом: $1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k\ 1\ 2$. Повторяя описанные шаги, продолжаем фрагмент до циклической раскраски с периодом $[1\ 2\ 3\ \dots\ (k-1)\ k]$. \square

Теперь докажем несколько свойств $(0,1)$ -разметок бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 .

Лемма 21. Фрагменты 1100 и 010 не могут встретиться в одной и той же $(0,1)$ -разметке графа $Ci_\infty(2)$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Значит, в рассматриваемой разметке встретится последовательность 110^l10 , где $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$.

Далее всюду буквами будем обозначать некоторые цвета, возможно, одинаковые. В рамках данного доказательства считаем, что буквы обозначают цвета, отличные от 1. Рассмотрим три случая.

1. $l = 2$. Соответствующий фрагмент совершенной раскраски может быть записан в виде $11ab1c$. Он однозначно продолжается до $11ab1c1$, т.к. у вершины цвета 1 в окружении есть соцветная с ней вершина. Отметим, что цвета a и b не совпадают, т.к. в их окружении разное количество 1-окрашенных вершин. Т.к. вершину цвета a окружают ровно три соседа цвета 1, и рассматриваемый фрагмент является частью совершенной раскраски, то он продолжается до $11ab1c1ba11$. Мультимножества $\{1, a, b, c\}$ и $\{1, 1, b, b\}$ описывают цветовой состав окружения вершин цветов 1 и c соответственно. Значит, рассматриваемая последовательность однозначно продолжается до $11ab1c1ba11cbb$. Сравнивая цветовой состав окружения вершин цвета b , получаем, $a = b$. Противоречие.

2. $l = 3$. В совершенной раскраске, соответствующей данной $(0,1)$ -разметке, есть последовательность вида $11abcd$. Заметим, что внутренняя степень цвета 1 равна 1. В силу Леммы 19 и последнего замечания рассматриваемый фрагмент продолжается следующим образом: $be11abc1d1$. Отметим, что в окружении вершины цвета c находится только одна 1-окрашенная вершина. Сравним цветовой состав окружения вершин цвета 1: вторая справа вершина этого цвета соседствует ровно с одной вершиной цвета c , но в окрестностях радиуса один вершин блока 11 все вершины соседствуют с как минимум двумя вершинами первого цвета. Получили противоречие.

3. $l > 3$. Доказывается аналогично п. 2.

Наше предположение оказалось ложным. Следовательно, если в $(0,1)$ -разметке графа $Si_\infty(2)$ встречается фрагмент 110^l , где $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, то фрагмент 010 в такой раскраске отсутствует. \square

Лемма 22. 1. Если в $(0,1)$ -разметке графа $Ci_\infty(2)$ есть фрагмент $110^l1, l \in \mathbb{N}, l > 4$, то соответствующая ей совершенная раскраска является зеркальной типа $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k .

2. Рассмотрим совершенную раскраску графа $Ci_\infty(2)$, в которой наименьшее расстояние между соцветными вершинами равно 2. Если в соответствующей ей $(0,1)$ -разметке есть фрагмент $1010^l1, l \in \mathbb{N}, l > 3$, то исходная совершенная раскраска является зеркальной типа $S_{11}(k)$ для подходящего k .

Доказательство. 1. Согласно условию леммы в рассматриваемой $(0,1)$ -разметке найдется фрагмент $110^l1, l \in \mathbb{N}, l > 4$. Он продолжается вправо единицей в силу Леммы 21. Соответствующая часть совершенной раскраски имеет вид: $ab11cd \dots ef11gh$, при этом $1 \notin \{c, d, e, f\}$. Согласно Лемме 19 верно $a = d$ и $e = h$, следовательно, получаем: $ab11ca \dots ef11ge$. Пронумеруем 1-окрашенные вершины в таком фрагменте слева направо. Для первой и третьей вершин первого цвета выпишем цветовые составы их окружения, всюду далее нижний индекс в такой записи будет соответствовать количеству вершин цвета 1, смежных с вершиной данного цвета: $\{1_1, a_1, b_2, c_2\}$ и $\{1_1, e_1, f_2, g_2\}$. Сравнивая последние, заключаем $a = e$. Таким образом, рассматриваемый фрагмент имеет вид: $ab11ca \dots af11ga$. Рассмотрим в нем вторую слева вершину цвета a . Заметим, что в ее окружении есть лишь одна вершина, которая имеет ровно двух 1-окрашенных соседей - это вершина цвета c . Для других a -окрашенных вершин данного фрагмента таким свойством обладают цвета b, f и g . Значит, все четыре цвета b, c, f и g совпадают. Таким образом, рассматриваемая последовательность принимает следующий вид — $ab11ba \dots ab11ba$. Она, в свою очередь, однозначно восстанавливается вовне и внутрь. Результатом такого восстановления является зеркальная раскраска типа $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k .

2. По условию леммы в рассматриваемой $(0,1)$ -разметке есть слово $1010^l1, l \in \mathbb{N}, l > 3$. Соответствующий фрагмент совершенной раскраски имеет вид: $1a1bc \dots de1fg$, при этом $1 \notin \{a, b, c, d, e, f\}, b \neq c, d \neq e$ и $f \neq g$, потому

что расстояние между вершинами одинакового цвета не меньше 2. Так как окрестность вершины цвета 1 содержит единственную соцветную ей вершину, то $g = 1$. Таким образом, рассматриваемая часть совершенной раскраски имеет вид: $1a1bc\dots de1f1$. Пронумеруем вершины цвета 1 в таком фрагменте слева направо. Рассмотрим окрестности второй и третьей вершин первого цвета: $\{1_1, a_2, b_1, c_1\}$ и $\{1_1, d_1, e_1, f_2\}$. Такие мультимножества совпадают, если $a = f, b = d, c = e$ или $a = f, b = e, c = d$. Первый вариант противоречит цветовому составу окружения вершины цвета b . Если же $a = f, b = e$ и $c = d$, фрагмент имеет вид $1a1bc\dots cb1a1$, и, как и в первом пункте леммы, однозначно восстанавливается вовне и внутрь. Результатом такого восстановления является зеркальная раскраска типа $S_{11}(k)$ для подходящего k . \square

Основная теорема

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. *Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(2)$ с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;
2. пятнадцать нестандартных раскрасок:

$$N_1 = [11112], \quad N_2 = [11122], \quad N_3 = [11212], \quad N_4 = [11123], \quad N_5 = [11213], \\ N_6 = [11223], \quad N_7 = [12123], \quad N_8 = [11234], \quad N_9 = [12134], \quad N_{10} = [111222], \\ N_{11} = [112113], \quad N_{12} = [123145], \quad N_{13} = [112334], \quad N_{14} = [123124], \\ N_{15} = [121323].$$

Доказательство. Минимальное расстояние между соцветными вершинами в совершенной раскраске обозначим за ρ . Доказательство утверждения теоремы проведено перебором всех возможных значений этого параметра. Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 2), структура которой повторяет структуру таблицы в доказательстве леммы 13.

Значения параметра ρ в такой таблице записаны в первом столбце. Во втором столбце представлены фрагменты, которые обязательно встретятся в $(0,1)$ -

разметке графа $Ci_\infty(2)$ при соответствующем значении ρ , называемые *неизбежными*. После чего для каждого значения ρ перечислены все возможные продолжения неизбежного фрагмента, анализ любого из которых приводит либо к противоречию, либо к совершенной раскраске. Результат такого анализа записан в последний столбец, где прочерк означает, что с данным продолжением совершенную раскраску графа $Ci_\infty(2)$ получить нельзя.

Таблица 2: Схема доказательства Теоремы 13.

ρ	Неизбежный фрагмент	Продолжение	Совершенная раскраска
1	110	000 001 010 011 100 101 110 111	$S_{22}(k)(k \geq 3), S_{12}(k)(k \geq 4), N_{13}$ $S_{12}(3), N_6, N_8, N_{10}$ – $S_{22}(2), N_2, N_4$ – N_5, N_3 $S_{12}(2), N_{11}$ N_1
2	1010	00 01 10	$S_{11}(k)(k \geq 4), N_{15}$ N_7, N_9 $S_{11}(3), S_{11}(2) = S(2)$
3	100100	0 1	– $S(3), N_{12}, N_{14}$
≥ 4	$10^s 10^s, s \geq 3$	*	$S(k), k \geq 4$

Остановимся более подробно на доказательстве.

Для $\rho = 1$ неизбежный фрагмент имеет вид 110 и допускает восемь продолжений (см. таблицу 2).

Рассмотрим продолжение 000 такого неизбежного фрагмента. Согласно Лемме 19 в соответствующей совершенной раскраске найдется слово $ab11cade$, причем $1 \notin \{a, c, d, e\}$. Продолжая этот фрагмент вправо вершиной цвета 1, в силу Лемм 19 и 21 получим: $ab11cade11fd$. Запишем цветовой состав окружения 1-окрашенных вершин: $\{1_1, a_1, b_2, c_2\}$ и $\{1_1, d_1, e_2, f_2\}$. Из совпадения этих мультимножеств следует: $a = d$. Таким образом, рассматриваемая часть совершенной раскраски имеет вид: $ab11caae11fa$. Анализируя палитру цвета a ,

закключаем: $b = c$ или $b = e$.

Если цвета b и c совпадают, то совпадают все четыре цвета — b, c, e и f . Соответствующая совершенная раскраска восстанавливается однозначно — $S_{22}(3)$. Пусть $b \neq c$ и $b = e$. Тогда $c = f$ и рассматриваемый фрагмент однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом $[ab11ca] = [112334] = N_{13}$.

Если фрагмент 110000 продолжается нулем, значит, согласно Лемме 22 рассматриваемая $(0,1)$ -разметка соответствует зеркальной раскраске $S_{12}(k)$ или $S_{22}(k)$ для подходящего k ($k \geq 4$ и $k \geq 3$ соответственно).

Этим завершается доказательство в случае продолжения 000 неизбежного фрагмента для $\rho = 1$.

Продолжение 010 неизбежного фрагмента для $\rho = 1$ противоречиво в силу Леммы 21. Продолжению 100 этого фрагмента соответствует последовательность $11a1bc$, причем $1 \notin \{a, b, c\}$. Такая последовательность не может быть частью никакой совершенной раскраски в силу противоречивости окружений вершин первого цвета.

Для других продолжений этого фрагмента доказательство аналогично, поэтому авторы оставляют его читателю в качестве упражнения.

Пусть $\rho = 2$. Для такого значения ρ неизбежный фрагмент имеет вид 1010 и допускает три продолжения — 00, 01 и 10.

Продолжению 00 неизбежного фрагмента 1010 соответствует часть исходной совершенной раскраски следующего вида: $1a1bcd$. Если продолжение такой части вправо на одну вершину окрашено не цветом 1, то исходная раскраска является зеркальной в силу Леммы 22.

Иначе в рассматриваемой раскраске можно выделить такой фрагмент: $1a1bcd1$, $1 \notin \{a, b, c, d\}$, $b \neq c, c \neq d$. Т.к. вершина цвета 1 имеет одного 1-окрашенного соседа, то фрагмент продолжается до $1a1bcd1e1$, $e \neq 1$. Пронумеруем вершины цвета 1 в таком фрагменте слева направо. Рассмотрим окрестности второй и третьей вершин первого цвета: $\{1_1, a_2, b_1, c_2\}$ и $\{1_1, e_2, d_1, c_2\}$. Два таких мультимножества равны, значит, $a = e$ и $b = d$. Запишем результат пере-

обозначения цветов: $1a1bcb1a1$. Т.к. цветовой состав окружения вершин цвета 1, b и c известен, то фрагмент продолжается до совершенной раскраски с периодом $S_{11}(4)$, если $a \neq c$, иначе — до раскраски N_{15} .

Рассмотрим продолжение неизбежного фрагмента словом 01 . В исходной совершенной раскраске в таком случае есть фрагмент $1a1bc1$ ($1 \notin \{a, b, c\}, b \neq c$). Т.к. $\rho = 2$, и цветовой состав окружения 1-окрашенной вершины определяется однозначно из записанной части исходной раскраски, то такая часть продолжается до всей совершенной раскраски. Если $a \neq b$ и $a \neq c$, то период такой раскраски — $[1a1bc] = [12134] = N_9$. Случаю $a = b, a \neq c$ соответствует совершенная раскраска $[1a1ac] = [12123] = N_7$, как и случаю $a \neq b, a = c$.

Если продолжение неизбежного фрагмента — 10 , то цветовой состав окружения 1-окрашенной вершины в исходной раскраске вновь определен однозначно. Значит, соответствующий фрагмент совершенной раскраски имеет вид: $1a1b1a$. Такой фрагмент восстанавливается до раскраски $S_{11}(3)$ в случае $a \neq b$ или до $S(2)$ в противоположном случае.

Доказательство для случая $\rho = 2$ окончено.

Значению $\rho = 3$ соответствует неизбежный фрагмент 100100 , допускающий продолжения 0 и 1 .

Для продолжения 0 такого фрагмента часть совершенной раскраски имеет вид: $1ab1cde$, причем $1 \notin \{a, b, c, d, e\}$ и $a \neq b, b \neq c, c \neq d, c \neq e, d \neq e$. Запишем палитру цвета 1: $\{a_2, b_2, c_1, d_{\geq 1}\}$. Значит, изучаемый фрагмент можно продолжить влево двумя способами — словом cd или dc . Так как цветовые составы окружения вершин цветов a, b и c и в том, и в другом варианте определяются однозначно, то соответствующие фрагменты допускают дальнейшее продолжение. В обоих случаях такие продолжения оказываются противоречивыми.

Продолжению неизбежного фрагмента для $\rho = 3$ вершиной цвета 1 соответствует последовательность вида $1ab1cd1$. Согласно палитре цвета 1, полученный фрагмент можно продолжить вправо словом ab или ba . В первом случае совершенная раскраска восстанавливается до N_{12} , если все четыре цвета a, b, c

и d различны, до N_{14} , если $a = c, b \neq d$, а при $a = c$ и $b = d$ получается раскраска $S(3)$. Продолжая фрагмент $1ab1cd1$ словом ba , получаем противоречие с цветовым составом окружения вершины цвета b .

Случай $\rho = 3$ исследован полностью.

Для $\rho = 4$ неизбежный фрагмент имеет вид 10001000 . Ему соответствует следующий фрагмент совершенной раскраски: $1abc1def$, причем $1 \notin \{a, b, c, d, e, f\}$, цвета a, b и c попарно различны, как и цвета d, e и f . В палитре первого цвета есть элемент a , значит, $a = d$ или $a = e$. Пусть $a = d$. Анализируя окружение вершины цвета a , заключаем - $b = e$ или $b = f$. В случае $b = f$ продолжение противоречиво, а для $b = e$ фрагмент однозначно восстанавливается до совершенной раскраски с периодом $[1abc] = [1234] = S(4)$. При $a = e$ все варианты продолжения противоречат составу окружения вершины цвета b .

Согласно Лемме 20 значениям $\rho > 4$ соответствуют циклические раскраски. Теорема 13 доказана. \square

Заметим, что некоторые нестандартные раскраски после объединения двух или более цветов остаются совершенными, при этом результатом такой операции может быть как нестандартная, так и стандартная раскраска. Например, совершенную раскраску N_7 можно получить объединением второго и третьего цветов в раскраске N_9 .

Следует также отметить следующий факт. Достаточное условие теоремы, т.е. свойство стандартных и нестандартных раскрасок быть совершенными, доказано в первом пункте текущей главы. Доказательство теоремы, выполненное перебором, служит подтверждением необходимости этого условия, т.е. того, что других совершенных раскрасок нет.

Таким образом, в этой главе описаны все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа $Ci_\infty(2)$. Полученный результат подтверждает гипотезу, сформулированную в [22] в случае $n = 2$. Для $n > 2$ вопрос остается открытым.

Заключение

В диссертации описаны все допустимые параметры совершенных 2-раскрасок таких бесконечных серий кубических графов, как графы конечных призм, лестницы Мебиуса, скрещенные призмы, обобщенные графы Петерсена, хордальные циклы, усеченные кубические графы. Графы таких семейств вместе с графом Паппа покрывают все транзитивные кубические графы с числом вершин, не превосходящим 18.

В работе также перечислены все совершенные раскраски графа бесконечной призмы в любое конечное число цветов.

Совершенные раскраски в любое конечное число цветов охарактеризованы также для другого бесконечного графа — бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2.

Для решения задач теории совершенных раскрасок, как уже отмечалось во введении, исследователям часто приходится прибегать к перебору. Таким образом, становится актуальной задача организовать перебор эффективно.

Автором предложены три новых метода характеристики совершенных раскрасок графов: метод локально жестких фрагментов, принцип индуцирования и метод минимальных расстояний в $(0,1)$ -разметках. Первый метод универсален, его продуктивность максимальна в случае конечных графов малого обхвата. Принцип индуцирования предназначен для двудольных графов, а метод минимальных расстояний в $(0,1)$ -разметках — для графов, в группах автоморфизмов которых есть элемент бесконечного или достаточно большого порядка.

В теории совершенных раскрасок много открытых вопросов. Представляется интересным продолжить исследование бесконечных семейств кубических графов в случае произвольного конечного числа цветов. Другим интересным направлением исследования является изучение таких раскрасок циркулянтных графов, в частности, графов $Ci_\infty(n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Литература

- [1] Августинovich, С. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решетки / С. В. Августинovich, А. Ю. Васильева, И. В. Сергеева // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 3 — 10.
- [2] Визинг, В. Г. Дистрибутивная раскраска вершин графа / В. Г. Визинг // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3—12.
- [3] Воробьев, К. В. О совершенных 2-раскрасках гиперкуба / К. В. Воробьев, Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 65 — 75.
- [4] Дистель, Р. Теория графов / Р. Дистель // Новосибирск: Издательство Института математики, 2002. - 336 с.
- [5] Кохов, В. А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов / В. А. Кохов // Исследования по прикладной теории графов. — Новосибирск: Наука, 1986. — С. 113—114.
- [6] Могильных, И. Ю. Совершенные 2-раскраски графов Джонсона / И. Ю. Могильных // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. — 2010.
- [7] Паршина, О. Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций / О. Г. Паршина // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 76—83.
- [8] Пузынина, С. А. Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки / С. А. Пузынина // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. — 2008.

- [9] Пузынина, С. А. Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета / С. А. Пузынина // Дискретн. анализ и исслед. опер. — Сер. 2, 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37 — 54.
- [10] Фон-Дер-Флаасс, Д. Г. Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности / Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292 — 295.
- [11] Фон-Дер-Флаасс, Д. Г. Совершенные 2-раскраски гиперкуба / Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. мат. журнал. — 2007. - Т. 48, № 4. — С. 923 — 930.
- [12] Хорошилова, Д. Б. О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов / Д. Б. Хорошилова // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 82—89.
- [13] Хорошилова, Д. Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета / Д. Б. Хорошилова // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80—92.
- [14] Цветкович, Д. Спектры графов / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс // Киев: Наукова Думка, 1984. — 383 с.
- [15] Avgustinovich, S. V. Completely regular codes in the infinite hexagonal grid / S. V. Avgustinovich, D. S. Krotov, A. Yu. Vasil'eva // Sib. Electron. Math. Rep. — 2016. — V. 13. — P. 987—1016.
- [16] Avgustinovich, S. V. Induced perfect colorings / S. V. Avgustinovich, I. Yu. Mogil'nykh // Sib. Electron. Math. Rep. — 2011. — V. 8. — P. 310—316.
- [17] Axenovich, M. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius / M. Axenovich // Discrete Mathematics. — 2003. — V. 268. — P. 31 — 49.
- [18] Fon-Der-Flaass, D. G. A bound on correlation immunity / D. G. Fon-Der-Flaass // Sib. Electron. Math. Rep.— 2007. — № 4. — P. 133—135.

- [19] Gavriilyuk, A. L. On Perfect 2-Colorings of Johnson Graphs $J(v, 3)$ / A. L. Gavriilyuk, S. V. Goryainov // Journal of Combinatorial Designs. — 2013. — V. 21, № 6. — P. 232 — 252.
- [20] Krotov, D. S. Perfect colorings of Z^2 : Nine colors / D. S. Krotov // E-print 0901.0004, arXiv.org. — 2009. — Available at <http://arxiv.org/abs/0901.0004>.
- [21] Martin, W. J. Completely Regular Designs / W. J. Martin // J. Combin. Designs. — 1998. — V. 6, № 4. — P. 261 — 273.
- [22] Parshina, O.G. Perfect k -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances [Электронный ресурс] / O. G. Parshina // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata. (August 9-15, 2015. Yekaterinburg, Russia). — P. 80. — Режим доступа: http://g2a2.imm.uran.ru/doc/G2A2_Abstracts.pdf.
- [23] Puzynina, S. A. On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids / S. A. Puzynina // Sib Math. J. — 2011. — V. 52, № 1. — P. 91 — 104.
- [24] Vasil'eva, A. Yu. Distance regular colorings of the infinite triangular grid / A. Yu. Vasil'eva // Collection of Abstracts of the International Conference "Mal'tsev Meeting". — Novosibirsk: Novosibirsk State University. — 2014. — P. 98.

Публикации автора по теме диссертации

- [25] Августинovich С. В., Лисицына М. А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов / С. В. Августинovich, М. А. Лисицына // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2.— С. 3–17. (Перевод: Avgustinovich S. V., Lisitsyna M. A. Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs / S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — V. 5, № 4. — P. 519–528.)
- [26] Лисицына М. А. Совершенные 3-раскраски графов призмы и лестницы Мебиуса / М. А. Лисицына // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 28–36. (Перевод: Lisitsyna M. A. Perfect 3-colorings of prism and Mobius ladder graphs / M. A. Lisitsyna // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — V. 7, № 2. — P. 215–220.)
- [27] Лисицына М. А., Августинovich С. В. Совершенные раскраски призмы / М. А. Лисицына, С. В. Августинovich // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 1116–1128.
- [28] Лисицына М. А., Паршина О. Г. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 / М. А. Лисицына, О. Г. Паршина // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 20–34. (Перевод: Lisitsyna M. A. Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2 / M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina // J. Appl. Industr. Math. — 2017. — V. 11, № 3. — P. 381–388.)
- [29] Лисицына М. А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов / М. А. Лисицына // Материалы 48-й международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс математика. (Новосибирск, 12-13 апреляб 2010). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ.— 2010. — С. 166.

- [30] Lisitsyna M. A. Induction principle in perfect colorings theory [Электронный ресурс] / М. Lisitsyna // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Spectra and Symmetries. (August 15-28, 2016. Akademgorodok, Novosibirsk, Russia). — P. 77. — Режим доступа: <http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/Book\%20of\%20abstract-G2S2-2016.pdf>.