Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирское отделение Российской академии наук

На правах рукописи

ИЛЬЕВ Артем Викторович

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ, РАЗРЕШИМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ И МАТРОИДОВ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Ремесленников В.Н.

Новосибирск 2017

# Оглавление

# Введение

В диссертационной работе алгебраическими и теоретико-модельными методами изучаются наследственные классы обыкновенных графов и классы бесконечных матроидов конечного ранга. Исследуются конечные системы уравнений над обыкновенными графами на предмет совместности и строятся алгоритмы нахождения их общих решений — координатных графов. Также в работе рассматриваются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов на языке логики первого порядка и разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов.

Актуальность темы диссертации обусловлена тем, что в настоящее время алгебраические методы широко используются в теории графов и матроидов [1, 2, 6, 10, 27]. Сформировалось целое направление исследований, которое получило название алгебраической теории графов. Хотя и в меньшей степени, но наряду с алгебраическими методами в теории графов успешно применяются также логические методы, прежде всего методы теории моделей. По аналогии с алгебраической теорией графов, можно говорить о формировании особого раздела теории графов — логической теории графов [10].

Поскольку обыкновенный граф можно рассматривать как алгебраическую систему, язык которой состоит из предиката равенства и бинарного предиката смежности вершин, теория графов представляет собой теорию первого порядка, полученную из узкого исчисления предикатов с равенством путём добавления в его язык иррефлексивного симметричного бинарного отношения. Хорошо известно, что элементарная теория графов неразрешима так же, как и теория конечных графов [8, 21]. В связи с этим естественно возникают вопросы о разрешимости теорий различных классов графов.

Так как в диссертационной работе используются теоретико-модельные методы, то предполагается знакомство читателя с основными понятиями теории моделей [23, 39]. Важнейшие теоретико-модельные понятия достаточно хорошо представлены в монографии [4]. В ней подробно освещены вопросы о решении систем уравнений над произвольными алгебраическими системами, такие как проверка совместности системы уравнений, описание её общего решения и т.д. Применение общих понятий и теорем из этой монографии даёт возможность определить чёткие алгоритмические процедуры решения систем уравнений над графами, что является одной из целей этой диссертации.

При изучении элементарной теории конкретного класса графов очень важны его универсальная теория, определённая $\forall$-предложениями, и экзистенциальная теория, определённая $\exists$-предложениями. В упомянутой выше монографии, как и в настоящей диссертации показано, что решение систем уравнений над графами тесно связано как с экзистенциальными, так и с универсальными теориями. Этим теориям будет уделено достаточно большое внимание в диссертационной работе.

Существенную важность представляет проблема разрешимости универсальных теорий различных классов графов. Изучение универсальных теорий особенно актуально в силу их значения в теории моделей. Ряд общих проблем разрешимости интерпретируется в качестве проблем разрешимости универсальных теорий [8]. Повышенный интерес к универсальным теориям вызывает их применение в логическом программировании и теории баз данных [3]. Наконец, многие комбинаторные задачи, в частности, задачи экстремальной комбинаторики, сформулированные на языке теории моделей, приводят к изучению моделей универсальных теорий первого порядка [43].

Вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов вызывают традиционный интерес [28, 31, 45, 51]. Так, в [31] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах запрещённых порождённых подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, которые определяются в терминах запрещённых как порождённых, так и непорождённых подграфов, например, класс планарных графов, класс двудольных графов, класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$) и многие другие. Поэтому естественно возникает задача поиска условий аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах всех возможных запрещённых подграфов, а не только порождённых.

Целью диссертации является построение алгоритмов решения систем уравнений над графами, исследование проблем аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов, а также проблем разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов.

Далее приведём основные понятия и известные результаты, относящиеся к теме исследования.

## Аксиоматизируемые классы и разрешимые теории

Напомним некоторые основные определения и утверждения теории моделей [9, 23, 39].

*Язык* или *сигнатура* $\mathrm{L}$ состоит из множества $\mathrm{R}$ предикатных символов, множества $\mathrm{F}$ функциональных символов и множества $\mathrm{C}$ константных символов. Кроме того, с каждым предикатным символом $R \in \mathrm{R}$ и с каждым функциональным символом $F \in \mathrm{F}$ однозначно связано положительное натуральное число $n_R$ или $n_F$ — *арность* или *местность*.

*Алгебраическая система языка* $\mathrm{L}$ или $\mathrm{L}$-*система* — это последовательность

$$\mathcal{M} = \langle M;\ R^{\mathcal{M}}, F^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle,$$

в которой $M$ — это непустое множество, называемое *основным множеством* или *носителем* системы $\mathcal{M}$; каждому предикатному символу $R \in \mathrm{R}$ соответствует $n_R$-местное отношение $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$; каждому функциональному символу $F \in \mathrm{F}$ соответствует $n_F$-местная функция $F^{\mathcal{M}} : M^{n_F} \to M$; каждому константному символу $c \in \mathrm{C}$ соответствует некоторый элемент $c^{\mathcal{M}} \in M$. В дальнейшем при описании $\mathrm{L}$-систем будет использована краткая запись $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L} \rangle$.

Алгебраическая система $\mathcal{M}$ называется *моделью* или *реляционной системой*, если в ней отсутствуют функции.

Две алгебраические системы $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L} \rangle$ и $\mathcal{N} = \langle N, \mathrm{L} \rangle$ языка $\mathrm{L}$

называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : M \to N$, сохраняющий их предикаты и функции.

*Формулой* языка L называется формула узкого исчисления предикатов с равенством, внелогические константы которой содержатся в L. Формулу без свободных переменных называют *предложением.* Предложение $\varphi$ называется *экзистенциальным предложением* или $\exists$-*предложением*, если $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, где $\psi$ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \dots, x_n$. Предложение $\varphi$ называется *универсальным предложением* или $\forall$-*предложением*, если $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$, где $\psi$ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \dots, x_n$.

Под *классом* алгебраических систем в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство L-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей L-системы. Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений $Z$ языка L, что для любой системы $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \in \boldsymbol{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ для всех } \varphi \in Z.$$

Множество предложений $Z$ называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым.* Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым* или $\forall$-*аксиоматизируемым.* Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует *рекурсивное множество аксиом* $Z$, т. е. $Z$ — система аксиом класса $\boldsymbol{K}$, и существует алгоритм, который по любому предложению языка L позволяет узнать, принадлежит оно множеству $Z$ или нет, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *рекурсивно аксиоматизируемым.*

Пусть $S(\mathrm{L})$ — множество всех предложений языка L, $\boldsymbol{K}$ — некоторый класс L-систем. *Элементарной теорией* или просто *теорией класса* $\boldsymbol{K}$ называется множество $Th(\boldsymbol{K})$ всех предложений из $S(\mathrm{L})$, истинных во всех системах из $\boldsymbol{K}$. Если существует алгоритм, который позволяет ответить на вопрос, принадлежит или нет произвольное предложение из $S(\mathrm{L})$ теории $Th(\boldsymbol{K})$, то эта теория называется *разрешимой.* Множество всех $\exists$-предложений теории $Th(\boldsymbol{K})$ называется *экзистенциальной теорией* или $\exists$-*теорией класса* $\boldsymbol{K}$. Множество всех $\forall$-предложений теории $Th(\boldsymbol{K})$ называется *универсальной теорией* или $\forall$-*теорией класса* $\boldsymbol{K}$.

## Системы уравнений над алгебраическими системами

В этом разделе в основном используются определения и понятия из монографий [3, 4].

Пусть $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L}\rangle$ — алгебраическая система языка L, а $X$ — некоторое множество переменных. Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* языка L определяется рекурсивно:

(T1) все переменные $x \in X$ являются термами;

(T2) все константные символы языка L являются термами;

(T3) если $t_1, ..., t_n$ — термы и $F$ — $n$-местный функциональный символ языка L, то $F(t_1, ..., t_n)$ есть терм.

*Термальная система* $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)$ языка L над множеством $X$ — это L-система с носителем $T_{\mathrm{L}}(X)$ такая, что:

(1) $c^{\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)} = c$ для любого константного символа $c \in \mathrm{C}$;

(2) $F^{\mathcal{T}_{\mathrm{L}}}(t_1, ..., t_n) = F(t_1, ..., t_n)$ для любого функционального символа $F \in \mathrm{F}$ и любых термов $t_1, ..., t_n \in T_{\mathrm{L}}(X)$;

(3) $R^{\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)} = \emptyset$ для любого предикатного символа $R \in \mathrm{R}$.

Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества $X$ определяется следующим образом:

(A1) если $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$, то $t_1 = t_2$ — атомарная формула;

(A2) если $t_1, ..., t_n \in T_{\mathrm{L}}(X)$ и $R$ — $n$-местный предикатный символ, то $R(t_1, ..., t_n)$ — атомарная формула.

Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ — конечное множество переменных. Атомарные формулы множества $At_{\mathrm{L}}(X)$ называются *уравнениями* языка L с переменными из $X$. Всякое подмножество $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ называется *системой уравнений* языка L.

Точка $p = (m_1, ..., m_n) \in M^n$ называется *решением уравнения* $f \in At_{\mathrm{L}}(X)$, если $\mathcal{M} \models f(m_1, ..., m_n)$. Точка $p$ является *решением системы уравнений* $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$, если она является решением каждого уравнения из $S$. Множество $V_{\mathcal{M}}(S)$ всех решений системы $S$ в $M^n$ называется *алгебраическим множеством* над алгебраической системой $\mathcal{M}$, определенным системой уравнений $S$.

Если $V_{\mathcal{M}}(S) = \emptyset$, то система уравнений $S$ называется *несовместной* над $\mathcal{M}$; иначе она называется *совместной*.

Через $\mathrm{L}^=$ обозначается обогащение языка L бинарным предикатом $=$, т. е. $\mathrm{L}^= = \mathrm{R}^= \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{C}$. *Обобщенной конгруэнцией* или *конгруэнцией Горбунова-Туманова* [3] на L-системе $\mathcal{M}$ называется функция $\theta$, ставящая в соответствие каждому $n$-местному предикатному символу $R$ языка

$\mathrm{L}^=$ некоторое $n$-местное отношение $R_\theta$ на множестве $M$ так, что выполняются следующие условия:

(C1) $R^{\mathcal{M}} \subseteq R_\theta$ для каждого $R \in \mathrm{R}$;

(C2) для любого $n$-местного предикатного символа $R \in \mathrm{R}$ и любых элементов $m_1, ..., m_n, m'_1, ..., m'_n \in M$ выполнено

$$m_i =_\theta m'_i,\ i = 1, ..., n, \text{ и } (m_1, ..., m_n) \in R_\theta \Longrightarrow (m'_1, ..., m'_n) \in R_\theta.$$

Конгруэнцию $\theta$ также представляют как совокупность множеств $\{R_\theta, R \in \mathrm{R}^=\}$. Через $\mathrm{Con}(\mathcal{M})$ обозначается множество всех конгруэнций на L-системе $\mathcal{M}$. Через $M/\theta$ будем обозначать фактор-множество множества $M$ по отношению эквивалентности $\theta$, через $m/\theta$ — класс эквивалентности элемента $m \in M$ по отношению $\theta$.

Для любой конгруэнции $\theta$ на $\mathcal{M}$ определяется *фактор-система* $\mathcal{M}/\theta$ языка L. Носителем $\mathcal{M}/\theta$ является множество $M/{=_\theta}$ классов эквивалентности элементов множества $M$ по отношению $\theta$, а предикатные и константные символы интерпертируются по правилам:

(F1) $c^{\mathcal{M}/\theta} = c^{\mathcal{M}}/\theta$ для любого константного символа $c \in \mathrm{C}$;

(F2) $(m_1/\theta, ..., m_n/\theta) \in R^{\mathcal{M}/\theta} \Longleftrightarrow (m_1, ..., m_n) \in R_\theta$ для любого предикатного символа $R \in \mathrm{R}$ и любых элементов $m_1, ..., m_n \in M$.

Поскольку элементы термальной системы $\mathcal{T}_\mathrm{L}(X)$ — это термы, а конгруэнции на $\mathcal{T}_\mathrm{L}(X)$ — это совокупности множеств $R(t_1, ..., t_{n_R})$, $R \in \mathrm{R}$, то всякая конгруэнция $\theta$ на $\mathcal{T}_\mathrm{L}(X)$ определяется некоторой совокупностью атомарных формул, которые будут истинны на фактор-системе $\mathcal{T}_\mathrm{L}(X)/\theta$.

Множество атомарных формул $S \subseteq At_\mathrm{L}(X)$ называется *конгруэнтным*, если для него выполнены условия:

(S1) $(t = t) \in S$ для любого $t \in T_\mathrm{L}(X)$;

(S2) $(t_1 = t_2) \in S \Rightarrow (t_2 = t_1) \in S$ для любых $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$;

(S3) $(t_1 = t_2) \in S$ и $(t_2 = t_3) \in S \Rightarrow (t_1 = t_3) \in S$ для любых $t_1, t_2, t_3 \in T_{\mathrm{L}}(X)$;

(S4) $(t_1 = t'_1), ..., (t_{n_R} = t'_{n_R}) \in S$ и $R(t_1, ..., t_{n_R}) \in S \Rightarrow R(t'_1, ..., t'_{n_R}) \in S$ для любых $R \in \mathrm{R}$ и $t_i, t'_i \in T_{\mathrm{L}}(X)$.

Непосредственно из определения вытекает, что конгруэнтное множество атомарных формул $S$ определяет конгруэнцию $\theta_S = \{R_{\theta_S}, R \in \mathrm{R}^=\}$ на термальной системе $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)$, где

$$R_{\theta_S} = \{(t_1, ..., t_{n_R}) \mid R(t_1, ..., t_{n_R}) \in S\}.$$

Верно и обратное, любая конгруэнция $\theta = \{R_{\theta_S}, R \in \mathrm{R}^=\}$ на $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)$ определяет множество атомарных формул

$$S(\theta) = \{R(t_1, ..., t_{n_R}) \mid (t_1, ..., t_{n_R}) \in R_\theta, R \in \mathrm{R}^=, t_1, ..., t_{n_R} \in T_{\mathrm{L}}(X)\}.$$

Ясно, что $S(\theta)$ — конгруэнтное множество атомарных формул, причем $\theta_{S(\theta)} = \theta$ и $S(\theta_S) = S$ для любых конгруэнций $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X))$ и конгруэнтного множества атомарных формул $S$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие $\theta \longleftrightarrow S$, сохраняющее порядок. Связь между $\theta$ и $S$ дополнительно выражается еще и в том, что

$$\phi \in S \Longleftrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)/\theta \models \phi(x_1/\theta, ..., x_n/\theta), \phi(x_1, ..., x_n) \in At_{\mathrm{L}}(X).$$

Для любого подмножества $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ естественно определяется его *конгруэнтное замыкание* $[S] \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$, равное пересечению всех конгруэнтных множеств, содержащих $S$. При этом условия (S1)–(S4) фактически указывают алгоритм построения $[S]$. Заметим, что для любой атомарной формулы $\phi \in [S]$ существует конечное подмножество $S_0 \subseteq S$

такое, что наборы формул $S_0$ и $S_0 \cup \{\phi\}$ эквивалентны. Поэтому множества $S$ и $[S]$ также эквивалентны. Таким образом, множество $S$ единственным образом определяет конгруэнцию $\theta_S = \theta_{[S]}$ на $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)/\theta$, причем $S(\theta_{[S]}) = [S]$.

Пусть $Y \subseteq M^n$ — произвольное подмножество аффинного $n$-мерного пространства над алгебраической системой $\mathcal{M}$.

*Радикал множества* $Y$ — это следующее подмножество множества $At_{\mathrm{L}}(X)$:

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{M}}(Y) = \{f \in At_{\mathrm{L}}(X) \mid \mathcal{M} \models f(y_1, ..., y_n) \ \forall \ (y_1, ..., y_n) \in Y\}.$$

Пусть $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ — система уравнений над алгебраической системой $\mathcal{M}$ и $Y = V_{\mathcal{M}}(S)$ — соответствующее ей алгебраическое множество. *Радикал системы уравнений* $S$ над алгебраической системой $\mathcal{M}$ — это множество $\mathrm{Rad}_{\mathcal{M}}(Y) = \mathrm{Rad}(Y)$. Атомарные формулы из $\mathrm{Rad}(Y)$ называются *следствиями* системы уравнений $S$ над $\mathcal{M}$. Другими словами, радикал $\mathrm{Rad}(Y)$ — это максимальная система уравнений, эквивалентная $S$ над $\mathcal{M}$. Радикал несовместной системы $S$ совпадает с $At_{\mathrm{L}}(X)$. Поскольку $\mathrm{Rad}(Y)$ — это конгруэнтное множество атомарных формул, то $[S] \subseteq \mathrm{Rad}(Y)$. Кроме того, радикал $\mathrm{Rad}(Y)$ определяет конгруэнцию $\theta_{\mathrm{Rad}(Y)}$ на термальной L-системе $\mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)$.

Фактор-система $\Delta_{\mathcal{M}}(Y) = \mathcal{T}_{\mathrm{L}}(X)/\theta_{\mathrm{Rad}(Y)}$ называется *координатной алгеброй* алгебраического множества $Y$. Отметим, что роль координатной алгебры фиксированной системы уравнений $S$ аналогична роли общего решения системы линейных уравнений над полем в линейной алгебре.

# Графы

Наиболее важные определения и понятия из теории графов можно найти в книгах [1, 2, 26].

Неориентированный обыкновенный *граф* — это пара $G = (V, E)$, где $V$ — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а $E$ — множество неупорядоченных пар различных элементов из $V$, называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины $u$ и $v$ называются *смежными*. В данной работе рассматриваются только те графы, в которых множество $V$ не более чем счётно. Граф *конечен*, если множество его вершин конечно, и *счётно бесконечен*, если множество его вершин счётно бесконечно.

Теперь дадим определение графа как алгебраической системы.

*Граф* — это алгебраическая система $G = \langle V, \mathrm{L}\rangle$, носитель которой $V$ — непустое не более чем счётное множество, а язык $\mathrm{L} = \langle E, =\rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности $E(x, y)$ является *иррефлексивным и симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

1) $\forall x \ \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

2) $\forall x \forall y \ (E(x, y) \to E(y, x))$ (симметричность).

Граф $H = \langle V_H, \mathrm{L}\rangle$ является *подграфом* графа $G = \langle V_G, \mathrm{L}\rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа $H$ смежна в графе $G$. Нетрудно видеть, что не всякий подграф $H$ является подсистемой L-системы $G$. Подграфы, являющиеся подсистемами, называются *порождёнными подграфами*.

Любому графу можно поставить в соответствие условие существования подграфа, изоморфного этому графу. Оно имеет вид

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \psi,$$

где $\psi$ — конъюнкт, который содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей.

Определение наследственного класса графов выглядит следующим образом. *Наследственный класс* графов — это класс, замкнутый относительно взятия порождёных подграфов. Наследственный класс графов называют *монотонным* [22], если он замкнут относительно любых подграфов, а не только порождённых.

Пусть $\boldsymbol{H}$ — некоторый класс графов. Обозначим через $Forb(\boldsymbol{H})$ класс, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из $\boldsymbol{H}$. Этот класс может быть определён заданием графов $H \in \boldsymbol{H}$ в качестве *запрещённых подграфов*.

В дальнейшем нам потребуется следующий критерий наследственности. Подобное утверждение для классов графов, определённых в терминах запрещённых миноров, можно найти в книге [5].

*Класс графов* $\boldsymbol{K}$ *является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определён в терминах запрещённых порождённых подграфов.*

Аналогичный критерий может быть сформулирован для монотонных наследственных классов графов.

Некоторые вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов изучались раньше. Например, в работе [31] исследовались конечно аксиоматизируемые квазимногообразия графов, а в [51] была формализована теория циклов, с помощью которой осуществлялся индуктивный переход к рассмотрению планарных графов.

В 1963 г. И. А. Лавровым был доказан следующий фундаментальный результат о разрешимости теории графов [21]:

*Элементарная теория графов неразрешима. Теория конечных графов также неразрешима.*

В связи с этим естественно возникают вопросы о разрешимости теорий различных классов графов [8], а также о разрешимости их универсальных теорий.

Новым направлением в алгебраической геометрии является решение систем уравнений над графами. Существует тесная методологическая связь этого направления с разрешимостью теорий наследственных классов графов. Проверка принадлежности графа некоторому классу входит в качестве процедуры в различные алгоритмы на графах, в частности в алгоритмы, проверяющие разрешимы ли универсальные теории наследственных классов графов. Эта процедура может быть оформлена в виде решения конечной серии систем уравнений над графами. В случае графов удаётся формализовать общие методы исследования систем уравнений, предложенные в монографии [4], и построить алгоритмы проверки систем уравнений над графами на совместность и алгоритмы отыскания радикала и координатного графа — общего решения системы.

## Матроиды

Все основные понятия теории матроидов можно найти в книгах [1, 2, 47].

Впервые определение конечного матроида было дано в 1935 г. Уитни [50]. В дальнейшем было предложено множество эквивалентных определений матроида. Например, в статье [30] приведены тринадцать различных эквивалентных определений матроида (не считая их вариантов). Достаточно полный обзор определений матроида содержится также в книгах [44, 46]. Большая часть этих определений может быть отнесена к следующим двум группам.

В первой группе матроид определяется как булева решетка $2^U$ всех подмножеств конечного множества $U$ с выделенным семейством подмножеств. К этой группе относится определение в терминах независимых множеств, данное Уитни, в котором выделено непустое семейство *независимых множеств* $\mathcal{I} \subseteq 2^U$, обладающее свойствами:

(I1) если $A \in \mathcal{I},\ B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{I}$ (*наследственность*);

(I2) для любых $A, B \in \mathcal{I}$ таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{I}$ (*пополнение*).

Обозначается такой матроид обычно как $M = (U, \mathcal{I})$.

Известно, что в матроиде $M = (U, \mathcal{I})$ все максимальные по включению независимые подмножества любого множества $X \subseteq U$ имеют одинаковую мощность, называемую *рангом множества* $X$. Ранг множества $U$ называется *рангом матроида* $M$.

Во второй группе определений матроид задаётся как булева решетка $2^U$ всех подмножеств конечного множества $U$ с фиксированным на $2^U$ отображением. Наиболее известными определениями этой группы являются определение в терминах ранговой функции и следующее определение в терминах оператора замыкания.

*Матроид* — это пара $M = (U, \varphi)$, где $U$ — непустое конечное множество, $\varphi$ — отображение булевой решетки $2^U$ всех подмножеств множества $U$ в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает следующими свойствами:

($\varphi$1) $X \subseteq \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*направленность*);

($\varphi$2) для любых $X, Y \subseteq U$ если $X \subseteq Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (*монотонность*);

($\varphi$3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*идемпотентность*);

($\varphi$4) для любых элементов $u, v \in U$ и любого подмножества $X \subseteq U$ если $u \notin \overline{X}$ и $u \in \overline{X \cup \{v\}}$, то $v \in \overline{X \cup \{u\}}$ (*свойство замены*).

Матроид $M = (U, \varphi)$ называется *обыкновенным*, если он, кроме того, обладает свойством ($\varphi$5):

($\varphi$5) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ и $\overline{\{u\}} = \{u\}$ для любого $u \in U$.

Подмножество $X \subseteq U$ называется *замкнутым*, если $X = \overline{X}$. Замкнутые множества матроида $M = (U, \varphi)$ называют его *листами* или *поверхностями*.

Наряду с конечными матроидами изучают также матроиды общего вида, основное множество $U$ в которых может быть бесконечным. Как правило, в таких матроидах накладывают некоторые ограничения на ранг. Например, *матроид конечного ранга* в терминах независимых множеств определяется как булева решетка $2^U$ всех подмножеств произвольного множества $U$ с выделенным семейством $\mathcal{I} \subseteq 2^U$, обладающим свойствами (I1), (I2) и

(I3) существует такое число $k \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполнено $|A| \leq k$ (*свойство конечности ранга*).

Заметим, что класс матроидов конечного ранга представляет собой объединение всех классов матроидов фиксированного ранга $r$ по всем $r \in \mathbb{N}$.

В определении матроида конечного ранга в терминах оператора замыкания свойство конечности ранга выглядит следующим образом:

($\varphi$6) для любого $A \subseteq U$ существует такое $B \subseteq A$, что $|B| < \infty$ и $\overline{B} = \overline{A}$.

Определение в терминах оператора замыкания часто принимают в качестве определения комбинаторной геометрии, отождествляя комбинаторные геометрии и обыкновенные матроиды [1, 24, 32]. А именно, *комбинаторная геометрия* — это пара $M = (U, \varphi)$, где $U$ — непустое множество, $\varphi$ — отображение булевой решетки $2^U$ всех подмножеств множества $U$ в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает свойствами ($\varphi$1)–($\varphi$6).

В этой связи весьма естественно выглядело бы определение комбинаторной геометрии как геометрической конфигурации, т. е. системы поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. Хотя изучению вопросов, связанных с комбинаторными геометриями, посвящена обширная литература (см., например, [29, 33, 34, 35, 41, 42, 47, 48, 49]), ни в одной из известных работ не содержалось общего геометрического определения комбинаторной геометрии, которое было бы эквивалентно определению обыкновенного матроида.

С другой стороны, изучение матроидов в терминах рангов и поверхностей даёт возможность ответить на вопрос о разрешимости универсальной теории наследственного класса матроидов ранга, не большего фиксированного $r \in \mathbb{N}$, а также универсальной теории матроидов конечного ранга. Исследование бесконечных матроидов в этом направлении является естественным применением теоретико-модельных методов для работы с комбинаторными объектами, тесно связанными с обыкновенными графами.

## Основные результаты

Коротко изложим результаты данной диссертационной работы, состоящей из введения, трёх глав, заключения и списка литературы.

**В первой главе** исследованы три вида систем уравнений над обыкновенными графами: бескоэффициентные системы уравнений, т. е. когда множество констант $\mathrm{C} = \emptyset$; системы уравнений с одной переменной; произвольные системы уравнений *диофантовых языков*, т. е. таких языков, в которых множество констант совпадает с множеством вершин графа. Для каждого такого вида систем уравнений предложены алгоритмы проверки их совместности и построения их общего решения — координатного графа.

**Во второй главе** рассмотрены вопросы аксиоматизируемости различных классов графов на языке логики первого порядка и разрешимости их универсальных теорий. Найдены необходимые и достаточные условия универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизуремого наследственного класса графов.

**В третьей главе** предложено эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. В случае обыкновенного матроида его характеризация представляет собой эквивалентное определение комбинаторной геометрии. Доказана конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга $r$, а также двух наследственных классов матроидов ограниченного ранга — класса матроидов ранга, не большего $r$, и класса матроидов разбиения ранга, не большего $r$. Установлено, что класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

**В заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] и докладывались на российских и международных научных конференциях.

1. II Региональная конференция магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике и математике "ФМ ОмГУ 2014". Омск, 25 мая – 5 июня 2014 г.

2. Международная конференция "Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач". Омск, 27 – 30 апреля 2015 г.

3. Международная конференция "Мальцевские чтения". Новосибирск, 3 – 7 мая 2015 г.

4. 9-я Международная конференция "Дискретные модели в теории управляющих систем". Москва и Подмосковье, 20 – 22 мая 2015 г.

5. XII Международный семинар "Дискретная математика и ее приложения" им. академика О.Б. Лупанова. Москва, 20 – 25 июня 2016 г.

6. Международная конференция "Мальцевские чтения". Новосибирск, 21 – 24 ноября 2016 г.

7. XVIII Международная конференция "Проблемы теоретической ки-

бернетики". Пенза, 19 – 23 июня 2017 г.

# Глава 1

# Решение систем уравнений над графами

В этой главе исследуются три вида систем уравнений над обыкновенными графами: бескоэффициентные системы уравнений, т. е. когда множество констант $\mathrm{C} = \emptyset$; системы уравнений с одной переменной; произвольные системы уравнений *диофантовых языков*, т. е. таких языков, в которых множество констант совпадает с множеством вершин графа. Для каждого вида систем уравнений предложены алгоритмы проверки их совместности и построения их общего решения — координатного графа.

Существует тесная связь систем уравнений над графами с вопросами аксиоматизируемости наследственных классов графов и разрешимостью их универсальных теорий, о которых пойдёт речь в главе 2 диссертации. Проверка принадлежности графа некоторому классу входит в качестве процедуры в алгоритмы, устанавливающие разрешимость универсальных теорий наследственных класов графов. Эта процедура может быть оформлена в виде решения конечной серии систем уравнений над графами.

## 1.1 Предварительные сведения из алгебраической геометрии и теории графов

Все определения и факты, приводимые в параграфе, можно найти в [1, 2, 3, 4, 26].

*Граф* — это пара $G = (V, E)$, где $V$ — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а $E$ — множество неупорядоченных пар различных элементов из $V$, называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины $u$ и $v$ называются *смежными*. Граф *конечен*, если множество его вершин конечно, и *счётно бесконечен*, если множество его вершин счётно бесконечно. В данной главе рассматриваются только конечные обыкновенные графы, т. е. графы, не содержащие петель и кратных рёбер.

Теперь дадим определение графа как алгебраической системы.

*Граф* — это алгебраическая система $G = \langle V, \mathrm{L} \rangle$, носитель которой $V$ — непустое не более чем счётное множество, а язык $\mathrm{L} = \{E(x, y) \cup (x = y) \cup \mathrm{C}\}$ состоит из множества констант $\mathrm{C} \subseteq V$, бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности $E(x, y)$ является *иррефлексивным и симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

1) $\forall x \; \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

2) $\forall x \forall y \; (E(x, y) \to E(y, x))$ (симметричность).

Поскольку язык L обыкновенных графов не содержит функциональных символов, то здесь и далее будут рассматриваться только предикатные системы, а все определения будут адаптированы под предикатный случай.

Пусть $\Gamma = \langle V, \mathrm{L} \rangle$ — фиксированный обыкновенный граф, а $X$ — конечное множество переменных. Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* языка L от переменных из множества $X$ состоит из всех переменных $x \in X$ и всех констант C. Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества $X$ состоит из всех формул вида $t_1 = t_2$ и $E(t_1, t_2)$, где $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$. Атомарные форулы называются *уравнениями языка*, а произвольные подмножества $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ — *системами уравнений* языка L. Мы будем рассматривать только конечные системы уравнений. Заметим, что бескоэффициентные системы состоят только из уравнений вида $x = y$ и $E(x, y)$, а системы уравнений с одной переменной состоят только из уравнений вида $x = v_i$, $v_i = v_j$, $E(x, v_i)$ и $E(v_i, v_j)$, где $x, y \in X$, $v_i, v_j \in \mathrm{C}$ и константы интерпретируются как вершины графа.

Любая система уравнений $S$ от $k$ переменных над фиксированным обыкновенным графом определяет в аффинном $k$-мерном пространстве $V^k$ множество своих решений $V_\Gamma(S) = \{\overline{v} \in V^k \mid \Gamma \models S(\overline{v})\}$, которое называется *алгебраическим множеством*. Если $V_\Gamma(S) = \emptyset$, то система уравнений $S$ *несовместна* над $\Gamma$; иначе она является *совместной*. Две системы уравнений $S_1$ и $S_2$ называются *эквивалентными* над $\Gamma$, если $V_\Gamma(S_1) = V_\Gamma(S_2)$. Для любой системы уравнений $S$ над $\Gamma$ существует единственная эквивалентная ей максимальная система уравнений над $\Gamma$, которая называется *радикалом* системы $S$ и обозначается $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$. Если система $S$ несовместна над $\Gamma$, то $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = At_{\mathrm{L}}(X)$.

В рамках нашей совместной работы с В. Н. Ремесленниковым были предложены алгоритмы решения следующих задач.

1. Проверка системы уравнений $S$ на совместность.

2. Вычисление радикала системы $S$.

3. Построение координатного графа $CG_\Gamma(S)$ системы $S$.

Отметим, что роль координатного графа фиксированной системы уравнений $S$ аналогична роли общего решения системы линейных уравнений над полем в линейной алгебре. Координатный граф $CG_\Gamma(S)$ однозначно определяется радикалом $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ следующим образом.

Отношение $\theta_S$ на множестве термов $T_\mathrm{L}(X)$, заданное по правилу

$$t_1 \sim_{\theta_S} t_2 \longleftrightarrow (t_1 = t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S),\ t_1, t_2 \in T_\mathrm{L}(X),$$

является отношением эквивалентности, а константные и предикатные символы языка L интерпретируются на фактор-множестве $T_\mathrm{L}(X)/\theta_S$ по правилам:

(1) $c/\theta_S = c$ для любого символа $c \in \mathrm{C}$;

(2) $E(t_1/\theta_S, t_2/\theta_S) = \text{И} \longleftrightarrow E(t_1, t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

Построенный на фактор-множестве $T_\mathrm{L}(X)/\theta_S$ граф $CG_\Gamma(S)$ называется *координатным графом* алгебраического множества $V_\Gamma(S)$. Если система $S$ несовместна над $\Gamma$, то $CG_\Gamma(S)$ является тривиальной системой $\mathcal{E}$, т. е. графом, состоящим из единственной вершины и петли.

Следует отметить, что введённые выше отношение эквивалентности $\theta_S$ и определение координатного графа являются частными случаями обощённых понятий конгруэнции и фактор-системы, предложенных В.А. Горбуновым и В.И.Тумановым (см. [3]).

## 1.2 Процедура проверки совместности системы уравнений

Важную роль в этой процедуре играет понятие информационной базы системы уравнений. Её нахождение является вспомогательной процедурой для построения радикала и координатного графа.

Пусть $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ — конечный обыкновенный граф и $S$ — конечная система уравнений над $\Gamma$ от переменных из множества $X = \{x_1, ..., x_k\}$. *Информационная база* системы $S$ состоит из набора конечных множеств и натуральных чисел, определяемых по группам:

1) $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — множество переменных, $S = \{s_1, ..., s_l\}$ — множество уравнений с переменными из $X$; $k$, $l$ — числовые параметры.

2) $W_1, ..., W_k$ — подмножества $V(\Gamma)$. $W_i$ состоит из вершин графа $\Gamma$, которые содержатся в записи уравнений вида $E(x_i, v)$ системы $S$; $\alpha_i = |W_i|$ — числовые параметры, где $i = 1, ..., k$.

3) $W_1^\perp, ..., W_k^\perp$ — подмножества $V(\Gamma)$. $W_i^\perp$ состоит из вершин графа $\Gamma$, которые смежны с каждой из вершин множества $W_i$ (если $W_i = \emptyset$, то по определению полагаем $W_i^\perp = V(\Gamma)$); $\beta_i = |W_i^\perp|$ — числовые параметры, где $i = 1, ..., k$.

4) $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$ — подмножества $V(\Gamma)$. $W_i^{\perp\perp} = (W_i^\perp)^\perp$; $\gamma_i = |W_i^{\perp\perp}|$ — числовые параметры, причем $\gamma_i \geq \alpha_i$ для любых $i = 1, ..., k$.

Если в информационной базе хотя бы одно из чисел $\beta_i$ равняется нулю при $\alpha_i \neq 0$, то информационная база является *несогласованной*, а система $S$ несовместна над $\Gamma$. Иначе переходим к определению классов эквивалентности на $T_{\mathrm{L}}(X)$.

**Процедура 1 (проверка системы уравнений $S$ на совместность)**

Процедура строит классы эквивалентности $Y(t_i)$, где $t_i$ — переменная $x_i$ либо константа $v_i$, и преобразует систему уравнений $S$ в эквивалентную систему $\overline{S}$ на графе $\Gamma$. В начале работы процедуры каждое множество $Y(t_i)$ состоит только из одного терма $t_i$, а система $\overline{S}$ совпадает с $S$.

**Шаг 1.** Для каждого равенства $t_i = t_j$ из $\overline{S}$ процедура объединяет множества $Y(t_p)$ и $Y(t_q)$, содержащие термы $t_i$ и $t_j$. Полученное множество обозначается $Y(t_m)$, где $t_m$ — константа с наименьшим номером, а при её отсутствии — переменная с наименьшим номером из множества $Y(t_p) \cup Y(t_q)$. Равенство $t_i = t_j$ при этом удаляется из $\overline{S}$.

**Шаг 2.** Процедура последовательно просматривает все множества $Y(t)$.

1) Если существует множество $Y(t)$, в котором содержится две различные константы $v_i$ и $v_j$, то исходная система $S$ несовместна над $\Gamma$.

2) Если в множестве $Y(t)$ содержится только одна константа $v_j$ и при этом $\bigcap\limits_{i\,:\,x_i \in Y(t)} W_i^{\perp} \cap \{v_j\} = \emptyset$, то исходная система $S$ несовместна над $\Gamma$.

3) Если множество $Y(t)$ не содержит констант $v_j$, но при этом $\bigcap\limits_{i\,:\,x_i \in Y(t)} W_i^{\perp} = \emptyset$, то исходная система $S$ несовместна над $\Gamma$.

В каждом из случаев 1)–3) процедура завершает работу.

4) Если в множестве $Y(t)$ содержится только одна константа $v_j$ и при этом $\bigcap\limits_{i\,:\,x_i \in Y(t)} W_i^{\perp} \cap \{v_j\} = \{v_j\}$, то во всех уравнениях $\overline{S}$ каждая

переменная $x_i \in Y(t)$ заменяется на $v_j$ и переопределяется множество $W_i^{\perp} := \{v_j\}$.

5) Если множество $Y(t)$ не содержит констант, но при этом $\bigcap\limits_{i\,:\,x_i \in Y(t)} W_i^{\perp} = \{v_j\}$, то во всех уравнениях $\overline{S}$ каждая переменная $x_i \in Y(t)$ заменяется на $v_j$ и в $\overline{S}$ добавляются равенства $x_i = v_j$.

6) Если множество $Y(t)$ не содержит констант, и при этом $|\bigcap\limits_{i\,:\,x_i \in Y(t)} W_i^{\perp}| > 1$, то алгоритм выбирает переменную $x_j \in Y(t)$ с наименьшим номером и во всех уравнениях $\overline{S}$ заменяет все остальные переменные из $Y(t)$ на $x_j$.

**Шаг 3.** Процедура просматривает уравнения $E(t_i, t_j)$.

1) Если в $\overline{S}$ имеются уравнения $E(x_i, x_i)$ либо $E(v_i, v_j)$ такие, что $(v_i, v_j) \notin E(\Gamma)$, то исходная система $S$ несовместна над $\Gamma$. На этом процедура заканчивает работу.

2) Для каждого уравнения $E(x_i, v_j)$, полученного на шаге 2, процедура переопределяет множества $W_i^{\perp} := W_i^{\perp} \cap \{v_j\}^{\perp}$, где множество $\{v_j\}^{\perp}$ состоит из всех вершин графа $\Gamma$, смежных с $v_j$. Если новое множество $W_i^{\perp} = \emptyset$, то исходная система $S$ несовместна над $\Gamma$. Если новое множество $W_i^{\perp} = \{v_m\}$, то в $\overline{S}$ добавляется равенство $x_i = v_m$.

Если после выполнения шага 3 в $\overline{S}$ осталось хотя бы одно равенство, то процедура возвращается на шаг 1. Если после выполнения шага 3 в $\overline{S}$ равенств нет, но есть уравнения вида $E(x_i, x_j)$, то процедура переходит на шаг 4. В противном случае процедура завершает работу.

**Шаг 4.** Процедура ищет доминирующее множество для графа $(V_X, E_X)$, где $V_X$ — множество переменных, входящих в запись уравнений $E(x_i, x_j)$, а множество ребер $E_X$ определяется этими уравнениями. Напомним, что подмножество $V' \subseteq V$ вершин графа $(V, E)$ называется *доминирующим*, если каждая вершина из $V \setminus V'$ смежна по крайней мере с одной вершиной из $V'$. Доминирующее множество может быть найдено при помощи алгоритма из статьи [36].

Найденное доминирующее множество обозначим $X'$. Без ограничения общности можно считать, что $X' = \{x_1, ..., x_m\}$, где $m < k$. Далее рассматриваются всевозможные наборы вида $(v_{1n}, v_{2n}, ..., v_{mn})$, $n = 1, 2, ...$, где $v_{jn} \in W_j^{\perp}$. Для каждого такого набора составляется система уравнений

$$S_n = \overline{S} \cup \big( \bigcup_{j=1}^{m} (x_j = v_{jn}) \big).$$

Каждая такая система уравнений проверяется на совместность, т. е. для неё выполняются шаги 1–3 процедуры. Если в итоге все системы $S_n$ окажутся несовместными над $\Gamma$, то и система $\overline{S}$ тоже будет несовместной над $\Gamma$. В случае, когда некоторые системы $S_i$ окажутся совместными, система уравнений $\overline{S} \cup \big( \bigcap_i \overline{S}_i \big)$ будет эквивалентна исходной системе $S$, где $\overline{S}_i$ — системы уравнений, полученные после работы процедуры с совместными системами $S_i$. В этом случае происходит доопределение системы $\overline{S} := \overline{S} \cup \big( \bigcap_i \overline{S}_i \big)$. Кроме того, если некоторые классы эквивалентности $Y(t)$ объединялись в каждой совместной системе $\overline{S}_i$, то эти классы эквивалентности объединяются и в самой системе $\overline{S}$. На этом процедура завершает свою работу.

**Замечание 1.1.** *В бескоэффициентном случае шаг 2 процедуры сводится к прохождению этапа 6), шаг 3 — к прохождению этапа 1),* *а шаг 4 становится излишним. В случае системы уравнений с одной переменной процедура никогда не переходит на шаг 4.*

По окончании работы процедуры 1 система $\overline{S}$ состоит только из уравнений вида $E(t_i, t_j)$.

**Теорема 1.1.** *Процедура 1 корректно проверяет систему уравнений $S(X)$ на совместность.*

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что система уравнений $\overline{S}$, построенная процедурой 1, эквивалентна $S$.

По окончании шага 1 это очевидно.

Этапы 4) и 5) шага 2 означают, что только $v_j$ является вершиной графа $\Gamma$, которая может быть значением переменных из класса $Y(t)$. Поэтому замена каждой из этих переменных на $v_j$ сохраняет эквивалентность системы уравнений $\overline{S}$ исходной системе над $\Gamma$.

Этап 6) шага 2 означает, что множество значений переменных из класса $Y(t)$ непусто, и потому замена каждой из этих переменных на одну $x_j$ сохраняет эквивалентность системы уравнений $\overline{S}$ исходной системе $S$ над $\Gamma$.

На этапе 2) шага 3 процедуры 1 уточняется множество значений переменной $x_i$ на графе $\Gamma$, и если оно состоит только из одной вершины $v_j$, то добавление в $\overline{S}$ уравнения $x_i = v_j$ сохраняет эквивалентность системы уравнений $\overline{S}$ исходной системе $S$ над $\Gamma$.

На шаге 4 происходит переход от системы уравнений $\overline{S}$, содержащей уравнения с двумя переменными $E(x_i, x_j)$, к системам уравнений $\overline{S}_n$ таким, что $\overline{S}$ эквивалентна объединению $\bigcup\limits_n \overline{S}_n$ над графом $\Gamma$, причём каждое из уравнений $\overline{S}_n$ содержит не более одной переменной. Если во все совместные системы $\overline{S}_i$ попадут какие-либо уравнения, не содержащиеся в $\overline{S}$, то их добавление в $\overline{S}$ сохранит эквивалентность системы уравнений $\overline{S}$ исходной системе $S$ над $\Gamma$. Если в процессе проверки совместности каждой системы $\overline{S}_i$ происходило объединение одних и тех же классов эквивалентности $Y(t)$, то эти классы эквивалентности должны быть объединены и в самой системе $\overline{S}$.

Очевидно, что для любой переменной $x_i$ множество ее значений содержится в $W_i^{\perp}$. Несовместность системы $\overline{S}$, устанавливаемая на этапе 1) шага 2, следует из попадания двух констант $v_i$ и $v_j$ в один класс эквивалентности, что противоречит условию рассматриваемого диофантового случая, а именно условию попарного различия всех вершин графа. Несовместность системы $\overline{S}$, устанавливаемая на этапах 2) и 3) шага 2, следует из того, что никакая вершина графа $\Gamma$ не может быть значением переменной $x_i$ из класса эквивалентности $Y(t)$.

Несовместность системы $\overline{S}$, устанавливаемая на этапе 1) шага 3 процедуры 1, следует из отсутствия в графе $\Gamma$ петель и возможного отсутствия ребер $(v_i, v_j)$, существование которых вытекает из уравнений системы $\overline{S}$. Несовместность системы $\overline{S}$, устанавливаемая на этапе 2) шага 3, следует из того, что переменной $x_i$ не могут быть присвоены никакие значения на графе $\Gamma$.

Несовместность системы $\overline{S}$, устанавливаемая на шаге 4 процедуры 1, следует из того, что переменным из множества $X'$ не могут быть одновременно присвоены никакие конкретные значения на графе $\Gamma$. $\square$

**Пример 1.1.**

$V(\Gamma) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

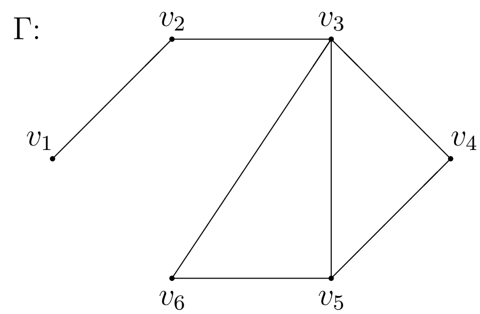


Рис. 1.

$E(\Gamma) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

$S = \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, x_3), E(x_2, v_4), E(x_4, v_6), x_3 = v_5\}$.

Строится информационная база.

$W_1 = \emptyset$, $W_2 = \{v_4\}$, $W_3 = \emptyset$, $W_4 = \{v_6\}$.

$W_1^{\perp} = V(\Gamma)$, $W_2^{\perp} = \{v_3, v_5\}$, $W_3^{\perp} = V(\Gamma)$, $W_4^{\perp} = \{v_3, v_5\}$.

**Процедура 1.** Проверка системы $S$ на совместность.

$Y(v_j) = \{v_j\}$, $j = 1, ..., 6$. $Y(x_i) = \{x_i\}$, $i = 1, ..., 4$.

$\overline{S} := S$

На шаге 1 удаляется равенство $x_3 = v_5$.

$Y(v_5) := Y(x_3) \cup Y(v_5) = \{x_3, v_5\}$.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, x_3), E(x_2, v_4), E(x_4, v_6)\}$.

На шаге 2 на этапе 4) переменная $x_3$ везде заменяется на константу $v_5$ и переопределяется множество $W_3^{\perp} := \{v_5\}$.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, v_4), E(x_2, v_5), E(x_4, v_6)\}$.

На шаге 3 переопределяется множество $W_2^{\perp} := \{v_3, v_5\} \cap \{v_3, v_4, v_6\} = \{v_3\}$.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, v_4), E(x_2, v_5), E(x_4, v_6), x_2 = v_3\}$.

Возврат на шаг 1.

На шаге 1 удаляется равенство $x_2 = v_3$.

$Y(v_3) := Y(x_2) \cup Y(v_3) = \{x_2, v_3\}$.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_2), E(x_1, x_4), E(x_2, v_4), E(x_2, v_5), E(x_4, v_6)\}$.

На шаге 2 на этапе 4) переменная $x_2$ везде заменяется на константу $v_3$.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_4), E(x_1, v_3), E(x_4, v_6), E(v_3, v_4), E(v_3, v_5)\}$.

На шаге 3 переопределяется множество $W_1^{\perp} := V(\Gamma) \cap \{v_2, v_4, v_5, v_6\} = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

Переход на шаг 4.

$\overline{S} := \{E(x_1, x_4), E(x_1, v_3), E(x_4, v_6), E(v_3, v_4), E(v_3, v_5)\}$.

$X' = \{x_1\}$. Так как $x_1 \in \{v_3\}^{\perp}$, то $x_1 \in \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

Выписываются системы уравнений:

$S_1 := \overline{S} \cup (x_1 = v_2)$;

$S_2 := \overline{S} \cup (x_1 = v_4)$;

$S_3 := \overline{S} \cup (x_1 = v_5)$;

$S_4 := \overline{S} \cup (x_1 = v_6)$.

Несложно установить, что все эти системы уравнений являются совместными, следовательно, исходная система $S$ тоже совместна. При этом $\bigcap\limits_i \overline{S}_i = \overline{S}$.

## 1.3 Процедуры построения радикала и координатного графа

После того, как было установлено, является ли совместной система уравнений $S$, можно переходить к построению её радикала и поиску её общего решения — координатного графа. На данном этапе имеются классы эквивалентности $Y(t_i)$ и система $\overline{S}$, состоящая только из уравнений вида $E(t_i, t_j)$.

**Процедура 2 (построение радикала)**

Если система $S$ несовместна над $\Gamma$, то $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = At_{\mathrm{L}}(X)$. В противном случае процедура рассматривает последние версии множеств $W_1^\perp, ..., W_k^\perp$, полученные при выполнении шагов 2 и 3 процедуры 1 проверки совместности системы $S$. С их помощью заново определяются множества $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$.

Далее радикал $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ строится с помощью следующей процедуры.

**Шаг 1.** $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) := \overline{S}$.

**Шаг 2.** Уравнения вида $E(x_i, v_j)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $v_j \in W_i^{\perp\perp}$.

**Шаг 3.** Если $t_1, t_2 \in Y(t)$, то уравнения $(t_1 = t_2)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$.

**Шаг 4.** Уравнения $(t = t)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любого $t \in T_{\mathrm{L}}(X)$.

**Шаг 5.** Если $(t_1 = t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$, то уравнения $(t_2 = t_1)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$.

**Шаг 6.** Если $(t_1 = t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ и $(t_2 = t_3) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$, то уравнения

$(t_1 = t_3)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $t_1, t_2, t_3 \in T_\mathrm{L}(X)$.

**Шаг 7.** Если $E(t_1, t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$, то уравнения $E(t_2, t_1)$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $t_1, t_2 \in T_\mathrm{L}(X)$.

**Шаг 8.** Если $(t_1 = t_1'), (t_2 = t_2') \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ и $E(t_1, t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$, то уравнения $E(t_1', t_2')$ добавляются в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ для любых $t_1, t_2, t_1', t_2' \in T_\mathrm{L}(X)$.

**Процедура 3 (построение координатного графа)**

Множество вершин координатного графа $\Delta = CG_\Gamma(S)$ совпадает с множеством индексов $t_i$ классов эквивалентности $Y(t_i)$ и является подмножеством $V(\Gamma) \cup X$, а множество ребер выглядит следующим образом:

$$E(\Delta) = E(\Gamma) \cup E(x_i, x_j) \cup E(x_i, w_m), \text{где } E(x_i, x_j), E(x_i, w_m) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S).$$

Если система $S$ несовместна над $\Gamma$, то $\Delta = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — граф, состоящий из одной вершины и петли. В противном случае процедура выполняет следующие построения.

**Шаг 1.** К множеству вершин графа $\Gamma$ добавляются все вершины из множества $X$.

**Шаг 2.** К полученному графу добавляются всевозможные ребра $(x_i, x_j)$ и $(x_i, w_m)$, для которых $E(x_i, x_j), E(x_i, w_m) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

**Шаг 3.** В полученном графе для каждого класса эквивалентности $Y(t_i)$ все вершины, находящиеся в этом классе, стягиваются в одну вершину, а кратные рёбра заменяются одним ребром.

В результате получается координатный граф $\Delta$.

**Теорема 1.2.** *Радикал* $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ *и координатный граф* $\Delta$ *корректно строятся процедурами 2 и 3.*

**Доказательство.** Поскольку уравнения вида $E(x_i, x_j)$ не несут никакой фактической информации о значении переменных $x_i$ и $x_j$ на графе $\Gamma$, то их наличие не дает дополнительных уравнений при построении радикала $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

Необходимость выполнения шага 1 процедуры 2 построения радикала очевидна. Корректность шага 2 следует из того, что для любой переменной $x_i$ множество ее значений совпадает с $W_i^\perp$, которое было получено при последнем выполнении шага 3 процедуры проверки совместности системы $S$. Поэтому уравнения $E(x_i, w_j)$, где $w_j \in W_i^{\perp\perp}$, тоже являются следствиями системы $S$ и, соответственно, попадают в радикал $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$. Выполнение шагов 3–8 процедуры 2 построения радикала следует непосредственно из его определения.

Построение координатного графа процедурой 3 осуществляется непосредственно по определению. $\square$

**Пример 1.2.**

Вернёмся к системе $S$, совместность которой мы доказали в предыдущем параграфе.

**Процедура 2.** Построение радикала.

Множество классов эквивалентности системы $S$ над графом $\Gamma$ выглядит так:

$Y(v_1) = \{v_1\}$, $Y(v_2) = \{v_2\}$, $Y(v_3) = \{x_2, v_3\}$, $Y(v_4) = \{v_4\}$, $Y(v_5) = \{x_3; v_5\}$, $Y(v_6) = \{v_6\}$, $Y(x_1) = \{x_1\}$, $Y(x_4) = \{x_4\}$.

Последние версии множеств $W_i^\perp$ выглядят следующим образом:

$W_1^{\perp} = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, $W_2^{\perp} = \{v_3\}$, $W_3^{\perp} = \{v_5\}$, $W_4^{\perp} = \{v_3, v_5\}$.

Процедура заново определяет множества $W_i^{\perp\perp}$:

$W_1^{\perp\perp} = \{v_3\}$, $W_2^{\perp\perp} = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, $W_3^{\perp\perp} = \{v_3, v_4, v_6\}$, $W_4^{\perp\perp} = \{v_4, v_6\}$.

Переход непосредственно к построению радикала $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

На шаге 1 $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = \{E(x_1, x_4), E(x_1, v_3), E(x_4, v_6), E(v_3, v_4), E(v_3, v_5)\}$.

На шаге 2 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $E(x_2, v_2)$, $E(x_2, v_4)$, $E(x_2, v_5)$, $E(x_2, v_6)$, $E(x_3, v_3)$, $E(x_3, v_4)$, $E(x_3, v_6)$, $E(x_4, v_4)$.

На шаге 3 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $x_2 = v_3$, $x_3 = v_5$.

На шаге 4 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$, $v_1 = v_1$, $v_2 = v_2$, $v_3 = v_3$, $v_4 = v_4$, $v_5 = v_5$, $v_6 = v_6$.

На шаге 5 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $v_3 = x_2$, $v_5 = x_3$.

На шаге 6 ничего не происходит.

На шаге 7 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $E(x_4, x_1)$, $E(v_2, x_2)$, $E(v_3, x_1)$, $E(v_3, x_3)$, $E(v_4, x_2)$, $E(v_4, x_3)$, $E(v_4, x_4)$, $E(v_5, x_2)$, $E(v_6, x_2)$, $E(v_6, x_4)$, $E(v_4, v_3)$, $E(v_5, v_3)$, $E(v_6, x_3)$.

На шаге 8 в $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ добавляются уравнения $E(x_1, x_2)$, $E(x_2, x_1)$, $E(x_2, x_3)$, $E(x_3, x_2)$, $E(x_3, v_3)$, $E(v_3, x_3)$, $E(v_2, v_3)$, $E(v_3, v_2)$, $E(v_3, v_5)$, $E(v_3, v_6)$, $E(v_4, v_5)$, $E(v_5, v_3)$, $E(v_5, v_4)$, $E(v_5, v_6)$, $E(v_6, v_3)$, $E(v_6, v_5)$.

В результате получается радикал

$\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = \{E(x_1,x_2),\ E(x_1,x_4),\ E(x_2,x_1),\ E(x_2,x_3),\ E(x_3,x_2),\ E(x_4,x_1),\ E(x_1,v_3),\ E(x_2,v_2),\ E(x_2,v_4),\ E(x_2,v_5),\ E(x_2,v_6),\ E(x_3,v_3),\ E(x_3,v_4),\ E(x_3,v_6),\ E(x_4,v_4),\ E(x_4,v_6),\ E(v_2,x_2),\ E(v_3,x_1),\ E(v_3,x_3),\ E(v_4,x_2),\ E(v_4,x_3),\ E(v_4,x_4),\ E(v_5,x_2),\ E(v_6,x_2),\ E(v_6,x_3),\ E(v_6,x_4),\ E(v_2,v_3),\ E(v_3,v_2),\ E(v_3,v_4),\ E(v_3,v_5),\ E(v_3,v_6),\ E(v_4,v_3),\ E(v_4,v_5),\ E(v_5,v_3),\ E(v_5,v_4),\ E(v_5,v_6),\ E(v_6,v_3),\ E(v_6,v_5),\ x_2 = v_3,\ x_3 = v_5,\ v_3 = x_2,\ v_5 = x_3,\ x_1 = x_1,\ x_2 = x_2,\ x_3 = x_3,\ x_4 = x_4,\ v_1 = v_1,\ v_2 = v_2,\ v_3 = v_3,\ v_4 = v_4,\ v_5 = v_5,\ v_6 = v_6\}$.

**Процедура 3.** Построение координатного графа.

Координатный граф $\Delta$ выглядит следующим образом:

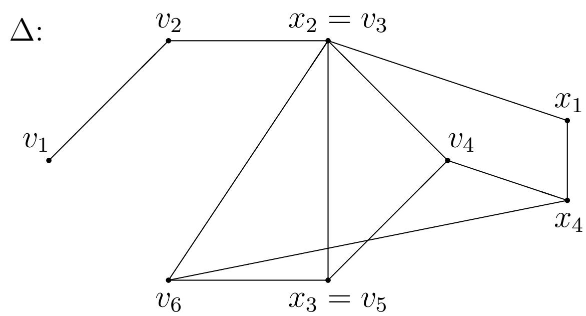


Рис. 2.

То есть $x_1 \in \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, $x_2 = v_3$, $x_3 = v_5$, $x_4 \in \{v_3, v_5\}$, причём $x_1 \neq x_4$ и значениями переменных $x_1$ и $x_4$ в каждом частном решении могут быть только смежные вершины в графе $\Gamma$.

# Глава 2

# Аксиоматизируемость и разрешимость универсальных теорий наследственных классов графов

В этой главе рассматриваются вопросы аксиоматизируемости различных классов графов на языке логики первого порядка. Доказан критерий аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов, определённых в терминах запрещённых подграфов. Найдены необходимые и достаточные условия универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизуремого наследственного класса графов.

## 2.1 Предварительные сведения из теории моделей

В данном параграфе напомним некоторые основные определения и утверждения теории моделей. Все их можно найти в [9, 23, 39].

Алгебраическая система $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L} \rangle$ языка $\mathrm{L} = \mathrm{R} \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{C}$ называется *подсистемой* алгебраической системы $\mathcal{N} = \langle N, \mathrm{L} \rangle$ и обозначается $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, если

1) $M \subseteq N$;

2) функции и предикаты в $\mathcal{M}$ являются ограничениями на $M$ соответствующих функций и предикатов в $\mathcal{N}$;

3) множество $M$ замкнуто относительно функций.

Две L-системы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *элементарно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), если для любого предложения $\varphi$ языка L

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

Две L-системы $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L} \rangle$ и $\mathcal{N} = \langle N, \mathrm{L} \rangle$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : M \to N$, сохраняющий их предикаты и функции.

Под *классом алгебраических систем* в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство L-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей L-системы. Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений $Z$ языка L, что произвольная система $\mathcal{M}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$, если и только если любое предложение $\varphi \in Z$ истинно в $\mathcal{M}$. Множество предложений $Z$ называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым.*

Предложение $\varphi$ называется *универсальным предложением* или $\forall$-*предложением*, если $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \psi$, где $\psi$ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым* или *∀-аксиоматизируемым.*

Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует *рекурсивное множество аксиом* $Z$, т. е. $Z$ — система аксиом класса $\boldsymbol{K}$, и существует алгоритм, который по любому предложению языка L позволяет узнать, принадлежит оно множеству $Z$ или нет, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *рекурсивно аксиоматизируемым.*

**Теорема 2.1 (Критерий конечной аксиоматизируемости)** [9]**.** *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *— класс алгебраических систем языка* L*. Класс* $\boldsymbol{K}$ *является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он и его дополнение* $\overline{\boldsymbol{K}}$ *в классе всех* L*-систем аксиоматизируемы.*

**Теорема 2.2 (Критерий универсальной аксиоматизируемости)** [9]**.** *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *— аксиоматизируемый класс алгебраических систем языка* L*. Класс* $\boldsymbol{K}$ *∀-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.*

Класс алгебраических систем называется *наследственным*, если он замкнут относительно подсистем. Примерами наследственных классов являются классы планарных и двудольных графов, а также класс конечных графов.

*Фильтр* над непустым множеством $I$ — это непустая совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества $I$, удовлетворяющая условиям:

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

2) если $X \in \mathcal{F}$, $X \subseteq Y \subseteq I$, то $Y \in \mathcal{F}$;

3) если $X, Y \in \mathcal{F}$, то $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Пусть $I$ — бесконечное множество мощности $|I| = \alpha \geqslant \aleph_0$. Тогда семейство множеств $X \subseteq I$ таких, что $|I \setminus X| < \alpha$, является фильтром и называется *фильтром Фреше*. Примером фильтра Фреше над $\mathbb{N}$ является фильтр, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны.

*Ультрафильтром* называется максимальный фильтр, т. е. фильтр, не содержащийся ни в каком отличном от него фильтре.

**Лемма 2.1** [9]. *Для каждого фильтра над $I$ существует содержащий его ультрафильтр над $I$.*

**Лемма 2.2** [9]. *Фильтр $\mathcal{F}$ над $I$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $X \subseteq I$ либо $X \in \mathcal{F}$, либо $I \setminus X \in \mathcal{F}$.*

Пусть $\{\mathcal{A}_i = \langle A_i, \Sigma\rangle \mid i \in I\}$ — семейство алгебраических систем языка L. *Декартовым* или *прямым произведением* семейства систем $\{\mathcal{A}_i\}$ называется L-система $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i = \langle A, \mathrm{L}\rangle$, где $A$ — декартово произведение основных множеств $A_i$, а предикаты и функции на $A$ задаются условиями:

1) $P_s(a_1, ..., a_{n_s})$ истинно тогда и только тогда, когда $P_s(a_1(i), ..., a_{n_s}(i))$ истинно для любого $i \in I$ $(a_1, ..., a_{n_s} \in A$, $P_s \in \mathrm{R}$ — $n_s$-местный предикат);

2) $f_t(a_1, ..., a_{m_t})$ есть элемент $a \in A$ с координатами $a(i) = f_t(a_1(i), ..., a_{m_t}(i))$ для любого $i \in I$ $(a_1, ..., a_{m_t} \in A$, $f_t \in \mathrm{F}$ — $m_t$-местная функция);

3) $c_k(i) = c_k$ для любого $i \in I$ $(c_k \in \mathrm{C})$.

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр над $I \neq \emptyset$. Отношение

$$a \equiv_{\mathcal{F}} b \Leftrightarrow \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F} \ (a, b \in A)$$

есть отношение эквивалентности на основном множестве $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ L-системы $\mathcal{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Пусть $a/\mathcal{F} = \{b \in A \mid a \equiv_{\mathcal{F}} b\}$ — смежный класс по этой эквивалентности для любого элемента $a \in A$, и $A/\mathcal{F} = \{a/\mathcal{F} \mid a \in A\}$.

*Фильтрованное по фильтру* $\mathcal{F}$ *произведение* L-систем $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ — это L-система $\mathcal{A}/\mathcal{F} = \langle A/\mathcal{F},\ \mathrm{L}\rangle$, в которой

1) $P_s(a_1/\mathcal{F}, ..., a_{n_s}/\mathcal{F})$ истинно, если и только если $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models P_s(a_1(i), ..., a_{n_s}(i))\} \in \mathcal{F}$ $(P_s \in \mathrm{R})$;

2) $f_t(a_1/\mathcal{F}, ..., a_{m_t}/\mathcal{F}) = a/\mathcal{F}$, если и только если $\{i \in I \mid f_t(a_1(i), ..., a_{m_t}(i)) = a(i)\} \in \mathcal{F}$ $(f_t \in \mathrm{F})$;

3) $c_k = c_k/\mathcal{F}$ $(c_k \in \mathrm{C})$.

L-системы $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ называются *сомножителями* этого произведения.

Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр над $I$, то фильтрованное произведение $\mathcal{A}/\mathcal{F}$ называется *ультрапроизведением* L-систем $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$.

**Теорема 2.3 (Лось)** [7]. *Предложение $\varphi$ языка* L *истинно в ультрапроизведении $\mathcal{A}/\mathcal{F}$* L*-систем $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ тогда и только тогда, когда множество номеров сомножителей, в которых предложение $\varphi$ истинно, принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$.*

Замкнутость относительно ультрапроизведений вместе с замкнутостью относительно элементарной эквивалентности необходима и достаточна для аксиоматизируемости класса алгебраических систем.

**Теорема 2.4 (Критерий аксиоматизируемости)** [9]. *Класс алгебраических систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

## 2.2 Аксиоматизируемость наследственных классов графов

Определение графа на языке исчисления предикатов первого порядка с равенством выглядит следующим образом [8]. *Граф* — это алгебраическая система $G = \langle V, \mathrm{L}\rangle$, носитель которой $V$ — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L} = \langle E, =\rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности $E(x, y)$ *иррефлексивен и симметричен*, т. е. удовлетворяет аксиоме:

$$\forall x \forall y\ [\neg E(x, x) \wedge (E(x, y) \to E(y, x))].$$

Таким образом, класс всех графов является конечно $\forall$-аксиоматизируемым.

Граф $H = \langle V_H, \mathrm{L}\rangle$ называется *подграфом* графа $G = \langle V_G, \mathrm{L}\rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа $H$ смежна в графе $G$. Подграф $H$ называется *порожденным подграфом* графа $G$, если любые две вершины $u, v \in V_H$ смежны в графе $H$ тогда и только тогда, когда они смежны в графе $G$. Очевидно, что всякий порожденный подграф является подсистемой графа, и наоборот, любая подсистема графа является его порожденным подграфом. Поэтому класс графов, замкнутый относительно порожденных подграфов, является *наследственным клас-*

*сом* графов. Наследственный класс графов называется *монотонным* [22], если он замкнут относительно любых подграфов (не только порожденных).

Монотонные наследственные классы графов тесно связаны с запрещенными подграфами. Пусть $\boldsymbol{H}$ — некоторый класс графов. Тогда класс $Forb(\boldsymbol{H})$, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из $\boldsymbol{H}$, является абстрактным классом, т. е. замкнут относительно изоморфизма. Этот класс может быть определен заданием графов $H \in \boldsymbol{H}$ в качестве *запрещенных подграфов*. Будем говорить, что класс $\boldsymbol{K}$ графов *определим в терминах запрещенных подграфов*, если $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$ для некоторого класса $\boldsymbol{H}$.

Для указания связи между монотонными наследственными классами графов и запрещенными подграфами нам потребуется следующий критерий наследственности. Аналогичное утверждение для классов графов, определенных в терминах запрещенных миноров, можно найти в книге [5].

**Теорема 2.5.** *Абстрактный класс графов $\boldsymbol{K}$ является монотонным наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах запрещенных подграфов.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть $\boldsymbol{K}$ — монотонный наследственный класс графов, $\boldsymbol{H}$ — дополнение к классу $\boldsymbol{K}$ в классе всех графов. Тогда $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$.

**Достаточность** очевидна. $\square$

Для бесконечных графов верна следующая теорема, которая легко доказывается от противного.

**Теорема 2.6.** *Пусть $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, причем все графы множества $\boldsymbol{H}$ конечны, $G$ — бесконечный граф, каждый конечный подграф которого принадлежит классу $\boldsymbol{K}$. Тогда $G$ также принадлежит классу $\boldsymbol{K}$.*

Вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов вызывают традиционный интерес [28, 31, 45, 51]. Так, в [31] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах запрещённых порождённых подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, которые определяются в терминах запрещённых как порождённых, так и непорождённых подграфов, например, класс планарных графов, класс двудольных графов, класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$) и другие. Поэтому естественно возникает задача поиска условий аксиоматизируемости наследственных классов графов, определённых в терминах всех возможных запрещённых подграфов, а не только порождённых.

С использованием теорем 2.5 и 2.6 можно получить критерии аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости произвольного монотонного наследственного класса графов. Заметим, что в силу теоремы 2.2 любой наследственный класс аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он является универсально аксиоматизируемым.

**Теорема 2.7 (Критерий универсальной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов).** *Монотонный наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов.*

**Доказательство. Необходимость.** Поскольку всякий монотонный наследственный класс графов замнут относительно подсистем, то в силу теоремы 2.2 любой аксиоматизируемый монотонный наследственный класс графов является $\forall$-аксиоматизируемым, поэтому любая его аксиома может считаться $\forall$-предложением. Тогда множество его запрещенных подграфов, которое существует по теореме 2.5, можно задать следующим образом.

Для каждой аксиомы $\varphi$ ее отрицание $\neg\varphi$ эквивалентно формуле $\exists x_1 ... \exists x_n \psi$, где $\psi$ — бескванторная формула. Очевидно, что можно определить конечное множество $\boldsymbol{H}_\varphi$ всех графов с числом вершин от 1 до $n$, на которых предложение $\neg\varphi$ истинно. Тогда, объединив множества $\boldsymbol{H}_\varphi$ для всех аксиом, получим семейство $\boldsymbol{H}$ конечных запрещенных подграфов для данного класса.

**Достаточность.** Любому конечному графу можно поставить в соответствие условие существования подграфа, изоморфного этому графу. Оно имеет вид

$$\exists x_1 \, ... \, \exists x_n \, \psi, \tag{2.1}$$

где $n$ — число вершин этого графа, а $\psi$ — конъюнкт, который содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей.

Тогда в силу теоремы 2.6 аксиоматика монотонного наследственного класса графов содержит аксиому теории графов и некоторое (возможно бесконечное) множество аксиом, каждая из которых соответствует одному из запрещенных подграфов, т. е. является отрицанием соответствующего предложения (2.1). Все эти аксиомы — универсальные предложения. □

**Следствие 2.1.** *Класс конечных графов неаксиоматизируем.*

Действительно, множество запрещенных подграфов для класса конечных графов не содержит ни одного конечного подграфа, поэтому в силу теоремы 2.7 класс конечных графов неаксиоматизируем.

В качестве примера $\forall$-аксиоматизируемого монотонного наследственного класса графов рассмотрим класс планарных графов. Конечный граф называется *планарным*, если его можно так уложить на плоскости, что его ребра не будут пересекаться вне вершин. Бесконечный граф называется *планарным*, если любой его конечный подграф планарен. Простейшими непланарными графами являются полный пятивершинный граф $K_5$ и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Графы называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного графа с помощью последовательности подразбиений его рёбер. Следующий критерий указывает все запрещённые подграфы класса планарных графов.

**Теорема 2.8 (Понтрягин–Куратовский)** [26]. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* $K_5$ *или* $K_{3,3}$.

Применяя этот критерий, можно аксиоматизировать класс планарных графов на языке исчисления предикатов первого порядка с равенством. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения:

$$P_0(x, y) = E(x, y);$$

$$P_1(x,y,z_1) = E(x,z_1) \wedge E(z_1,y);$$

$$P_2(x,y,z_1,z_2) = E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge E(z_2,y);$$

и т. д.

С помощью этих обозначений сформулируем предложения $\varphi_{k_1 \ldots k_{10}}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного $K_5$ (переменные $x_1, ..., x_5$ соответствуют вершинам графа $K_5$):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \ \exists z_{1,1} ... \exists z_{1,k_1} \ ... \ \exists z_{10,1} ... \exists z_{10,k_{10}} \ [\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge$$

$$\bigwedge_{\substack{p=1,...,10 \\ q=1,...,k_p}} (x_i \neq z_{p,q}) \wedge \bigwedge_{p \neq s \ \vee \ q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t}) \wedge P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, ..., z_{1,k_1}) \wedge$$

$$\wedge P_{k_2}(x_1, x_3, z_{2,1}, ..., z_{2,k_2}) \wedge ... \wedge P_{k_{10}}(x_4, x_5, z_{10,1}, ..., z_{10,k_{10}})],$$

где $k_1, ..., k_{10} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Аналогично записываются предложения $\psi_{k_1 \ldots k_9}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ (переменные $x_1, x_3, x_5$ соответствуют вершинам одной доли, $x_2, x_4, x_6$ — вершинам другой доли графа $K_{3,3}$):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6 \ \exists z_{1,1} ... \exists z_{1,k_1} \ ... \ \exists z_{9,1} ... \exists z_{9,k_9} \ [\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{p=1,...,9 \\ q=1,...,k_p}} (x_i \neq z_{p,q}) \wedge \bigwedge_{p \neq s \ \vee \ q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t})$$

$$\wedge P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, ..., z_{1,k_1}) \wedge P_{k_2}(x_1, x_4, z_{2,1}, ..., z_{2,k_2}) \wedge ... \wedge$$

$$\wedge P_{k_9}(x_5, x_6, z_{9,1}, ..., z_{9,k_9})],$$

где $k_1, ..., k_9 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Таким образом, аксиоматика класса планарных графов содержит аксиому теории графов и счётно бесконечное множество аксиом $\neg\varphi_{k_1\ldots k_{10}}$ и $\neg\psi_{k_1\ldots k_9}$

Другим примером $\forall$-аксиоматизируемого монотонного наследственного класса графов является класс двудольных графов. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества $V_1$ и $V_2$ (*доли*) так, что каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей. Критерий двудольности графа выглядит следующим образом.

**Теорема 2.9 (Кёниг)** [26]**.** *Граф двудолен, если и только если он не содержит циклов нечетной длины.*

Определим на языке теории моделей и класс двудольных графов. С помощью теоремы 2.9 аксиоматизируем класс двудольных графов. Запишем предложение $\xi_i$, означающее существование подграфа — цикла нечетной длины $2i+1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \ \ldots\ \exists x_{2i+1}\ [\bigwedge_{j\neq k}(x_j \neq x_k) \wedge \bigwedge_{j=1,\ldots,2i} E(x_j, x_{j+1}) \wedge E(x_{2i+1}, x_1)].$$

Тогда аксиоматика класса двудольных графов содержит аксиомы теории графов и счетное множество аксиом $\neg\xi_i$.

**Утверждение 2.1.** *Классы планарных и двудольных графов рекурсивно аксиоматизируемы.*

**Доказательство.** Приведем общую схему алгоритма, подтверждающего рекурсивную аксиоматизируемость данных классов графов. Рассмотрим аксиомы $\{\theta\}$, соответствующие запрещенным подграфам этих классов (в случае планарных графов это аксиомы $\neg\varphi_{kl\ldots t}$ и $\neg\psi_{kl\ldots s}$, в случае двудольных графов — аксиомы $\neg\xi_i$).

На вход алгоритма подается произвольное предложение $\varphi$ языка L. Чтобы данное предложение принадлежало множеству $\{\theta\}$, оно должно соответствовать какому-либо запрещенному подграфу. Отрицание предложения $\varphi$ в этом случае имеет вид $\exists x_1 \ldots \exists x_n \psi$, где $\psi$ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. На первом шаге алгоритм проверяет, выполнены ли эти условия для предложения $\neg\varphi$. Если выполнены, то переходим на следующий шаг, иначе $\varphi \notin \{\theta\}$.

Аксиомы $\{\theta\}$ классов планарных и двудольных графов могут быть упорядочены таким образом, что все аксиомы, содержащие $m$ переменных, будут идти раньше, чем аксиомы, содержащие $m+1$ переменных. На втором шаге алгоритма для предложения $\varphi$ нужно просмотреть все аксиомы, содержащие $n$ переменных и проверить, не совпадет ли одна из них с $\varphi$. Данная проверка позволит сделать окончательный вывод о принадлежности $\varphi$ множеству аксиом $\{\theta\}$.

Утверждение доказано. $\square$

Далее рассмотрим вопрос конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Связь аксиоматизируемости с ультрапроизведениями, изложенная в теореме 2.4, вместе с теоремой 2.1 предоставляет схему доказательства невозможности конечной аксиоматизации многих классов графов. Наряду с классом $\boldsymbol{K}$ рассматривается его дополнение $\overline{\boldsymbol{K}}$ в классе всех L-систем, затем доказывается незамкнутость этого дополнения относительно ультрапроизведений, а отсюда следует невозможность конечной аксиоматизации.

**Лемма 2.3.** *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *— монотонный наследственный класс графов, для которого минимальное множество запрещенных конечных подграфов счетно бесконечно. Тогда дополнение к классу* $\boldsymbol{K}$ *незамкнуто относительно ультрапроизведений.*

**Доказательство.** По условию леммы $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, где $\boldsymbol{H}$ — счетно бесконечное множество конечных графов $G_i$, $i \in \mathbb{N}$, причем $G_i \nsubseteq G_j$ для всех $i \neq j$.

Рассмотрим фильтр Фреше над множеством $\mathbb{N}$, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны. Из леммы 2.1 следует, что существует ультрафильтр $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр Фреше. В силу леммы 2.2 этот ультрафильтр не содержит ни одного конечного множества.

Все $G_i \in \overline{\boldsymbol{K}}$. Покажем, что их ультрапроизведение $G/\mathcal{F} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} G_i/\mathcal{F}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$.

Очевидно, что для всякого $G_i$ существует предложение $\varphi_i = \exists x_1 ... \exists x_n \psi_i$, означающее существование конечного подграфа, изоморфного $G_i$ ($\psi_i$ — бескванторная формула). Причем предложение $\varphi_i$ ложно во всех $G_j$ ($j \neq i$). По теореме 2.3 все $\varphi_i$ будут ложны в ультрапроизведении $G/\mathcal{F}$, т. е. оно не содержит ни одного из подграфов $G_i$.

Аналогично, в силу теоремы 2.3 $G/\mathcal{F}$ не будет содержать петель и ориентированных ребер. Поэтому $G/\mathcal{F} \in \boldsymbol{K}$. $\square$

В заключение этого параграфа докажем критерий конечной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов.

**Теорема 2.10 (Критерий конечной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов).** *Монотонный наследственный класс графов конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечного множества конечных запрещенных подграфов.*

**Доказательство. Необходимость.** По теореме 2.7 всякий аксиоматизируемый наследственный класс графов может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. При этом в силу леммы 2.3 если этот класс не может быть определен в терминах конечного множества конечных запрещенных подграфов, то он не является конечно аксиоматизируемым, что противоречит условию теоремы.

**Достаточность.** Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.7. □

**Следствие 2.2.** *Классы планарных и двудольных графов не являются конечно аксиоматизируемыми.*

## 2.3 Разрешимость универсальных теорий наследственных классов графов

При рассмотрении любой теории важное значение имеет вопрос о её разрешимости. Положительный ответ на него для теории какого-либо класса $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам класса $\boldsymbol{K}$. Поскольку разрешимые теории в чистом виде встречаются довольно редко, вопрос о разрешимости универсальных теорий является более чем актуальным.

Неразрешимость элементарной теории графов была установлена И.А. Лавровым (см. [8], [21]). Естественно возникают вопросы о разрешимости универсальной теории графов, а также универсальных теорий различных классов графов.

**Теорема 2.11.** 1) *Универсальная теория графов разрешима.*

2) *Универсальная теория произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов разрешима.*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что первое утверждение теоремы является частным случаем второго утверждения — в классе всех графов множество конечных запрещённых подграфов пусто. Поэтому будем доказывать только второе утверждение. Для этого рассмотрим следующий алгоритм проверки предложения на принадлежность $\forall$-теории.

Пусть $Th_{\forall}(\boldsymbol{K})$ — универсальная теория произвольного наследственного класса графов $\boldsymbol{K}$, определённого в терминах конечных запрещённых подграфов. На вход алгоритма подается произвольное универсальное предложение $\varphi$. Его отрицание $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное на классе всех графов предложение, находящееся в предварённой ДФ (дизъюнктивной форме). Алгоритм пытается построить граф класса $\boldsymbol{K}$, на котором предложение $\neg\varphi$ будет истинно. Если удастся, то предложение $\varphi$ не принадлежит универсальной теории $Th_{\forall}(\boldsymbol{K})$, и алгоритм выдает ответ НЕТ. Если же это невозможно, то $\varphi$ принадлежит этой теории, и алгоритм выдаёт ответ ДА.

**Алгоритм.**

**Шаг 1.** Для универсального предложения $\varphi$ формулируется предложение $\neg\varphi$. Это будет экзистенциальное предложение, т. е. $\neg\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n\, \psi$, где $\psi$ — бескванторная формула. Затем $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное предложение $\neg\varphi_1$, находящееся в предваренной ДФ: $\neg\varphi_1 = \exists x_1 \dots \exists x_n\, (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_m)$, где $\psi_i$ — конъюнкты, $i = 1, \dots, m$.

**Шаг 2.** Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_1$. Если конъюнкт $\psi_i$ содержит множитель $E(x, y)$, то в этот конъюнкт добавляется множитель $x \neq y$ в случае его отсутствия. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_2$.

**Шаг 3.** Алгоритм просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_2$. Если в каком-то конъюнкте $\psi_i$ содержатся переменные $x$ и $y$, но нет ни множителя $x = y$, ни множителя $x \neq y$, то алгоритм заменяет конъюнкт $\psi_i$ на дизъюнкцию $[\psi_i \wedge (x = y)] \vee [\psi_i \wedge (x \neq y)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно. Таким образом получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_3$.

**Шаг 4.** В каждом конъюнкте $\psi_i$ предложения $\neg\varphi_3$, содержащем множитель $x = y$, алгоритм заменяет все вхождения переменной $y$ на $x$ в остальных множителях конъюнкта $\psi_i$ и удаляет исходное равенство. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не исключатся все равенства. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_4$ в предваренной ДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условие попарного различия всех входящих в него переменных.

**Шаг 5.** Предложение $\neg\varphi$ в ДФ будет истинно для графа из $\boldsymbol{K}$, если на этом графе истинным будет хотя бы один из конъюнктов $\psi_i$ предложения

$\neg\varphi_4$. Алгоритмом последовательно просматриваются все конъюнкты $\psi_i$ и удаляются те из них, которые ложны на любом графе. Признаки этих конъюнктов:

1) конъюнкт содержит множитель $x \neq x$;

2) конъюнкт содержит множитель $E(x, x)$;

3) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(x, y)$;

4) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(y, x)$.

Если все конъюнкты предложения $\neg\varphi_4$ удалены на этом шаге, то предложение $\varphi$ истинно для всех графов и, следовательно, принадлежит универсальной теории $Th_\forall(\boldsymbol{K})$. В этом случае алгоритм заканчивает работу и выдает ответ ДА. Если же какие-то конъюнкты $\psi_i$ предложения $\neg\varphi_4$ исключить не удалось, то они составят новое экзистенциальное предложение $\neg\varphi_5$, эквивалентное предложению $\neg\varphi_4$ на классе всех графов. В этом случае алгоритм переходит на шаг 6.

**Шаг 6.** Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_5$. Для текущего конъюнкта $\psi_i$ строится граф с минимальным числом ребер, на котором этот конъюнкт будет истинным. Затем идет проверка этого графа на принадлежность классу $\boldsymbol{K}$.

— Если построенный граф принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то алгоритм завершает свою работу и выдает ответ НЕТ.

— Если построенный граф не принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то осуществляется переход к следующему конъюнкту.

— Если все конъюнкты просмотрены и ни для одного из них не удалось построить модели из класса $\boldsymbol{K}$, то алгоритм заканчивает свою работу и выдает ответ ДА.

Для любого конъюнкта $\psi_i$ предложения $\neg\varphi_5$ можно построить $n$-вершинный граф $G$, на котором этот конъюнкт будет истинным. Его симметричную матрицу смежности обозначим через $A$. Вершины графа $G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с переменными конъюнкта, на главной диагонали матрицы $A$ стоят нули. Если матрица смежности не заполняется до конца по условию конъюнкта, то алгоритм дозаполняет ее нулями, исключая таким образом дополнительную возможность появления в рассматриваемом графе запрещенных подграфов класса $\boldsymbol{K}$.

Чтобы убедиться в принадлежности $n$-вершинного графа $G$ классу $\boldsymbol{K}$, нужно рассмотреть все аксиомы $\theta$, которые соответствуют запрещенным подграфам, имеющим не более $n$ вершин. Для этого перебираются все предложения, содержащие не более $n$ переменных, отрицания которых имеют вид $\exists x_1 \ldots \exists x_m \psi$, где $\psi$ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. При рекурсивной аксиоматизируемости класса $\boldsymbol{K}$ среди этих предложений можно определить аксиомы.

Для выяснения того, не содержит ли граф $G$ запрещенных подграфов, нужно проверить, все ли предложения $\neg\theta$ ложны на данном графе. С этой целью для каждой аксиомы $\theta$, содержащей $m$ переменных ($m \leq n$), рассматриваются всевозможные соответствия между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$ аксиомы $\theta$ и вершинами $1, 2, \ldots, n$ графа (см. таблицу 2.1 для $m = 3$, $n = 4$). Для каждого соответствия проверяется ложность $\neg\theta$ на матрице смежности графа.

Таблица 2.1: Соответствия между переменными аксиомы $\theta$ и вершинами графа.

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 1 | 2 | 4 |
| **3** | 1 | 3 | 2 |
| **4** | 1 | 3 | 4 |
| **5** | 1 | 4 | 2 |
| **6** | 1 | 4 | 3 |
| ... | ... | ... | ... |
| **23** | 4 | 3 | 1 |
| **24** | 4 | 3 | 2 |

По окончании работы алгоритма либо для предложения $\neg\varphi$ будет построена модель — граф класса $\boldsymbol{K}$, либо будет доказана невозможность построения такой модели. Таким образом, будет получен ответ на вопрос о принадлежности универсального предложения $\varphi$ теории $Th_{\forall}(\boldsymbol{K})$. $\square$

**Следствие 2.3.** *Универсальные теории планарных и двудольных графов разрешимы.*

Данное следствие справедливо в силу утверждения 2.1.

Следующие простые примеры помогут наглядно продемонстрировать работу алгоритма из теоремы 2.11.

**Пример 2.1.** $Th_{\forall}$ — универсальная теория графов. Предложение $\varphi$ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 = x_2) \vee (x_1 \neq x_3) \vee E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

После выполнения шага 2 получаем предложение $\neg\varphi_2$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

Предложение $\neg\varphi_3$, построенное на шаге 3, совпадет с $\neg\varphi_2$.

На шаге 4 получаем предложение $\neg\varphi_4$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_1) \wedge E(x_2, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

На шаге 5 единственный конъюнкт $\neg\varphi_4$ будет удален, что позволит сделать вывод о принадлежности предложения $\varphi$ универсальной теории графов.

**Пример 2.2.** $Th_\forall(\boldsymbol{K})$ — универсальная теория двудольных графов. Предложение $\varphi$ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 [(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_2 = x_4) \vee (x_3 = x_4)$$

$$\vee E(x_1, x_4) \vee \neg E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3) \vee \neg E(x_3, x_4)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge (x_3 \neq x_4)$$

$$\wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)].$$

Оно состоит из единственного конъюнкта, что несколько упростит остальные шаги алгоритма.

Предложение $\neg\varphi_2$, построенное на шаге 2, совпадет с $\neg\varphi_1$.

На шаге 3 алгоритм вначале заменит единственный конъюнкт $\psi$ предложения $\neg\varphi_2$ дизъюнкцией $(\psi \wedge (x_1 = x_3)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3))$, а затем эту дизъюнкцию заменит на следующую:

$$(\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_4))$$

$$\vee(\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)).$$

После удаления равенств на шаге 4 будет получено предложение $\neg\varphi_4$, состоящее из четырех конъюнктов:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 [(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)].$$

На шаге 5 алгоритмом будут удалены первые два конъюнкта предложения $\neg\varphi_4$ как тождественно ложные на графах. В итоге предложение $\neg\varphi_5$ примет вид:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 [\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)].$$

На шаге 6 при просмотре первого конъюнкта будет построен граф $K_3$, его матрица смежности имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что этот граф не двудолен, так как является одним из запрещенных подграфов в классе двудольных графов. Для него нарушено условие аксиомы $\neg\xi_1$ — единственной аксиомы класса двудольных графов, выполнимость которой нужно проверить, поскольку число ее переменных не превосходит числа переменных конъюнкта.

При просмотре второго конъюнкта будет построена цепь длины 3 с ребрами $(1,2)$, $(2,3)$ и $(3,4)$, ее матрица смежности имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\neg\xi_1$ — единственная аксиома класса двудольных графов, выполнимость которой необходимо проверить. Формулируем для этой аксиомы ее отрицание $\xi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_2, x_3)].$$

Рассмотрим всевозможные соответствия между переменными аксиомы $\neg\xi_1$ и вершинами графа (см. таблицу 2.1). Чтобы рассматриваемый граф принадлежал классу двудольных графов, предложение $\xi_1$ должно быть ложно на нем для всех соответствий, т. е. этот граф не должен содержать цикла длины 3. Очевидно, что так оно и есть. Рассматриваемый граф, не содержит циклов нечетной длины. Поэтому данный граф принадлежит классу двудольных графов.

Таким образом, существует двудольный граф, на котором истинно предложение $\neg\varphi$, т. е. исходное предложение $\varphi$ не принадлежит универсальной теории двудольных графов.

# Глава 3

# Аксиоматизируемость наследственных классов матроидов

В этой главе предложено эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. В случае обыкновенного матроида его характеризация представляет собой эквивалентное определение комбинаторной геометрии. Доказана конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга $r$, а также двух наследственных классов матроидов ограниченного ранга — класса матроидов ранга, не большего $r$, и класса матроидов разбиения ранга, не большего $r$. Показано также, что наследственный класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

## 3.1 Предварительные сведения из теории матроидов

Все основные понятия и утверждения теории матроидов можно найти в [1, 2, 47].

Впервые определение конечного матроида было дано в 1935 г. Уитни [50]. В дальнейшем было предложено множество эквивалентных определений матроида. Например, в статье [30] приведены тринадцать различных эквивалентных определений матроида (не считая их вариантов). Достаточно полный обзор определений матроида содержится также в книгах [44, 46]. Большая часть этих определений может быть отнесена к следующим двум группам.

**Первая группа определений.** Матроид определяется как булева решетка $2^U$ всех подмножеств конечного множества $U$ с выделенным семейством подмножеств.

К этой группе относится данное Уитни определение в терминах независимых множеств. В этом определении выделено непустое семейство $\mathcal{I} \subseteq 2^U$, обладающее свойствами:

(I1) если $A \in \mathcal{I},\ B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{I}$ (*наследственность*);

(I2) для любых $A, B \in \mathcal{I}$ таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{I}$ (*пополнение*).

Обозначается такой матроид обычно как $M = (U, \mathcal{I})$.

Множества семейства $\mathcal{I}$ называются *независимыми*, а все остальные подмножества $U$ — *зависимыми* множествами матроида $M$. Максимальные по включению независимые множества матроида $M$ называются *базами*, а минимальные по включению зависимые множества — *циклами* матроида $M$. Семейства всех баз и всех циклов матроида обозначаются $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, соответственно.

Для любого множества $X \subseteq U$ *базой множества* $X \subseteq U$ называется любое его максимальное по включению независимое подмножество. Базы множества $U$ называются *базами матроида*. Несложно показать, что в матроиде все базы любого множества имеют одинаковую мощность.

*Ранговой функцией матроида* $M = (U, \mathcal{I})$ называется отображение $r : 2^U \to \mathbb{Z}_+$, значением которой $r(X)$ для множества $X \subseteq U$ является мощность любой базы множества $X$. Ранг множества $U$ называется *рангом матроида*.

К первой группе относятся также хорошо известные определения матроида в терминах баз (выделено семейство $\mathcal{B}$), циклов (выделено семейство $\mathcal{C}$) и другие.

**Вторая группа определений.** Матроид определяется как булева решетка $2^U$ всех подмножеств конечного множества $U$ с заданным на $2^U$ отображением.

Наиболее известными определениями второй группы являются определение в терминах ранговой функции и следующее определение в терминах оператора замыкания.

*Матроид* — это пара $M = (U, \varphi)$, где $U$ — непустое конечное множество, $\varphi$ — отображение булевой решетки $2^U$ всех подмножеств множества $U$ в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает следующими свойствами:

($\varphi$1) $X \subseteq \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*направленность*);

($\varphi$2) для любых $X, Y \subseteq U$ если $X \subseteq Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (*монотонность*);

($\varphi$3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ для любого $X \subseteq U$ (*идемпотентность*);

($\varphi$4) для любых элементов $u, v \in U$ и любого подмножества $X \subseteq U$ если $u \notin \overline{X}$ и $u \in \overline{X \cup \{v\}}$, то $v \in \overline{X \cup \{u\}}$ (*свойство замены*).

Матроид $M = (U, \varphi)$ называется *обыкновенным*, если он, кроме того, обладает свойством ($\varphi 5$):

($\varphi 5$) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ и $\overline{\{u\}} = \{u\}$ для любого $u \in U$.

Подмножество $X \subseteq U$ называется *замкнутым*, если $X = \overline{X}$. Замкнутые множества матроида $M = (U, \varphi)$ называют его *листами* или *поверхностями*.

В дальнейшем при описании одноэлементных множеств везде будут опускаться фигурные скобки.

Наряду с конечными матроидами изучают также матроиды общего вида, основное множество $U$ в которых может быть бесконечным. Как правило, в таких матроидах накладывают некоторые ограничения на ранг. Например, *матроид конечного ранга* в терминах независимых множеств определяется как булева решетка $2^U$ всех подмножеств произвольного множества $U$ с выделенным семейством $\mathcal{I} \subseteq 2^U$, обладающим свойствами (I1), (I2) и

(I3) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполнено $|A| \leq r$ (*свойство конечности ранга*).

Заметим, что класс матроидов конечного ранга представляет собой объединение всех классов матроидов фиксированного ранга $k$ по всем $k \in \mathbb{N}$.

В определении матроида конечного ранга в терминах оператора замыкания свойство конечности ранга выглядит следующим образом:

($\varphi 6$) для любого $A \subseteq U$ существует такое $B \subseteq A$, что $|B| < \infty$ и $\overline{B} = \overline{A}$.

Определение в терминах оператора замыкания часто принимают в качестве определения комбинаторной геометрии, отождествляя комбинаторные геометрии и обыкновенные матроиды [1, 24, 32]. А именно, *комбинаторная геометрия* — это пара $M = (U, \varphi)$, где $U$ — непустое множество, $\varphi$ — отображение булевой решетки $2^U$ всех подмножеств множества $U$ в себя, которое ставит в соответствие любому множеству $X \subseteq U$ его замыкание $\overline{X}$ и обладает свойствами ($\varphi$1)–($\varphi$6). Если в этом определении не требовать выполнения условия ($\varphi$5), то мы получим определение *комбинаторной предгеометрии.* Таким образом, комбинаторная предгеометрия и матроид — это один и тот же объект.

Известны и другие определения комбинаторной геометрии. Например, в книге [37] дается такое определение комбинаторной геометрии в терминах поверхностей (аналогичное определение матроида в терминах поверхностей можно найти в книгах [35, 44]):

*Комбинаторная геометрия* — это пара $M = (U, \mathcal{F})$, где $U$ — непустое конечное множество *точек,* $\mathcal{F}$ — непустое семейство его подмножеств (*поверхностей*), обладающих свойствами:

(F1) Если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;

(F2) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $U \in \mathcal{F}$, а также $\{x\} \in \mathcal{F}$ для любого $x \in U$;

(F3) для любой поверхности $F \in \mathcal{F}$ $(F \neq U)$ поверхности, которые покрывают $F$, образуют разбиение оставшихся точек.

Здесь $E$ *покрывает* $F$ означает, что $F \subset E$, причем $F \subset G \subset E$ не выполнено ни для какой поверхности $G \in \mathcal{F}$.

Как показано в [35, 37, 44], это определение эквивалентно предыдущему и поэтому может рассматриваться как эквивалентное определение обыкновенного матроида в терминах поверхностей. Как мы видим, это определение также относится к первой группе определений.

По-видимому, первым, кто выявил геометрические свойства матроида, был Маклейн. Уже в 1936 г. в статье [38] он предложил геометрическую интерпретацию обыкновенных матроидов как $n$-мерных схематических геометрических фигур. Его определения этих фигур выглядят следующим образом.

*Схематическая плоская фигура* — это система, состоящая из конечного числа *точек* и некоторых множеств этих точек, называемых *прямыми*, обладающая свойствами:

(P1) любая пара точек лежит на единственной прямой;

(P2) каждая прямая содержит по меньшей мере две точки;

(P3) никакая прямая не содержит все точки;

(P4) существует по крайней мере две различные точки.

*Схематическая пространственная фигура* — это система, состоящая из конечного числа *точек* и некоторых множеств этих точек, называемых *прямыми* и *плоскостями*, обладающая свойствами (P1)–(P4) и, кроме того, свойствами:

(S1) любые три точки, не лежащие на одной прямой, лежат в единственной плоскости;

(S2) каждая плоскость содержит по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой;

(S3) никакая плоскость не содержит все точки;

(S4) если плоскость содержит две точки прямой, то она содержит все точки данной прямой.

Далее Маклейн указывает, что аналогично можно определить *схематическую $n$-мерную фигуру*, которая состоит из конечного числа *точек* и $k$-*мерных плоскостей* для $k = 1, \ldots, n-1$, но точного определения не дает.

Маклейн утверждает, что существует взаимно однозначное соответствие между матроидами ранга $n+1$ и схематическими $n$-мерными фигурами, но не приводит доказательства.

Поскольку в статье Маклейна [38] в явном виде не сформулировано определение в $n$-мерном случае, то возник вопрос о существовании полностью геометрического определения комбинаторной геометрии в терминах поверхностей определенного ранга. И хотя изучению вопросов, связанных с комбинаторными геометриями, посвящена обширная литература (см., например, [29, 33, 34, 35, 41, 42, 47, 48, 49]), ни в одной из этих работ не содержится общего геометрического определения комбинаторной предгеометрии (геометрии), которое было бы эквивалентно определению матроида (обыкновенного матроида). В явном виде ранг поверхности присутствует только в следующем определении из статьи Мейсона [40].

*Комбинаторная геометрия* — это конечное множество поверхностей с соответствующим рангом $k \geq 0$ таких, что всякая $k$-поверхность и 1-поверхность (точка), не лежащая на ней, лежат в единственной $(k+1)$-поверхности.

Однако, если поверхностям комбинаторной геометрии в определении Мейсона поставить в соответствие поверхности обыкновенного матроида, а под рангом поверхности понимать значение ранговой функции на множестве всех точек данной поверхности, то данное в работе Мейсона определение комбинаторной геометрии не эквивалентно ранее приведенному определению обыкновенного матроида в терминах поверхностей, что подтверждается следующим примером.

**Пример 3.1.** $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — множество точек.

Поверхность ранга $0$ — $\emptyset$.

Поверхности ранга 1: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ — точки.

Поверхности ранга 2: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 5, 7\}$.

Поверхности ранга 3: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$, $\{1, 2, 4, 7\}$, $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 6, 7\}$, $\{1, 4, 5, 7\}$, $\{1, 4, 6, 7\}$, $\{1, 5, 6, 7\}$, $\{2, 3, 4, 7\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 7\}$, $\{2, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$, $\{3, 5, 6, 7\}$.

Поверхность ранга $4$ — само множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Легко видеть, что этот набор поверхностей удовлетворяет определению Мейсона, но не является обыкновенным матроидом, поскольку в нём нарушена аксиома (F1). Например, пересечение поверхностей $\{1, 2, 3, 7\}$ и $\{1, 2, 4, 7\}$ — множество $\{1, 2, 7\}$ не является поверхностью.

Естественно возникает задача дополнить определение Мейсона до эквивалентного определению обыкновенного матроида, после чего отделить комбинаторные предгеометрии от геометрий аналогично определениям матроида и обыкновенного матроида в терминах замыкания. Это сделано в следующем параграфе. Кроме того, в отличие от Маклейна, который ведет речь только о конечных матроидах фиксированного ранга, будет дано геометрическое определение как конечных, так и бесконечных матроидов конечного ранга.

## 3.2 Взаимно однозначное соответствие между матроидами и комбинаторными предгеометриями

В общем случае определение матроида конечного ранга в терминах независимых множеств выглядит следующим образом [1].

*Матроид* — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где $U$ — непустое (возможно, бесконечное) множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее свойствами:

(I1) если $A \in \mathcal{I},\ B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{I}$ (наследственность);

(I2) для любых $A, B \in \mathcal{I}$ таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup b \in \mathcal{I}$ (пополнение);

(I3) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполнено $|A| \leq r$ (конечность ранга).

Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — матроид, где $\mathcal{I}$ — семейство его независимых множеств. Фиксируем $A \in \mathcal{I}$ — независимое множество мощности $k$. Определим *поверхность ранга* $k$ как множество

$$F(A) = A \cup \{u \in U \mid A \cup u \notin \mathcal{I}\}.$$

**Лемма 3.1.** *Пусть $A, B \in \mathcal{I}$, $|A| = |B|$, причем $A \neq B$ и $B \subseteq F(A)$. Тогда $F(A) = F(B)$.*

**Доказательство.** 1) Докажем, что $F(A) \subseteq F(B)$. Предположим противное, т. е. существует $a \in F(A) \setminus F(B)$. Это означает, что $B \cup a \in \mathcal{I}$.

Воспользуемся свойством пополнения (I2). $|B \cup a| = |A| + 1$, поэтому существует $b \in (B \cup a) \setminus A$ такой, что $A \cup b \in \mathcal{I}$. С другой стороныны, $A \cup b \subseteq F(A)$ — противоречие с определением $F(A)$. Следовательно, $F(A) \subseteq F(B)$.

2) Докажем, что $F(B) \subseteq F(A)$. Предположим противное, т. е. существует $b \in F(B) \setminus F(A)$. Это означает, что $B \cup b \notin \mathcal{I}$ и $A \cup b \in \mathcal{I}$.

Так как $|A \cup b| = |B| + 1$, то в силу свойства (I2) существует $a \in (A \cup b) \setminus B$ такой, что $B \cup a \in \mathcal{I}$. Поскольку $B \cup b \notin \mathcal{I}$, то $a \neq b$. Кроме того, в пункте 1 доказано, что $F(A) \subseteq F(B)$. Поэтому $B \cup a \subseteq F(B)$. Т. е. мы получаем противоречие с определением $F(B)$. Это означает, что $F(B) \subseteq F(A)$. Таким образом, $F(B) = F(A)$. $\square$

**Следствие 3.1.** *Поверхность ранга $k$ однозначно определяется любым независимым множеством мощности $k$, содержащимся в этой поверхности.*

Следствие 3.1 дает возможность говорить о поверхности ранга $k$ без указания конкретного независимого множества мощности $k$, определяющего эту поверхность. Таким образом, семейство поверхностей матроида определяется по следующему правилу:

$$\mathcal{F} = \{ F \subseteq U \mid \exists A \in \mathcal{I} \; (\, F = F(A) \,) \}. \tag{3.1}$$

**Лемма 3.2.** *Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — матроид, $A \subseteq U$ — подмножество его элементов мощности $k$, не лежащее ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$. Тогда $A \in \mathcal{I}$.*

**Доказательство.** От противного. Пусть $A \notin \mathcal{I}$ — множество мощности $k$ такое, что для любого независимого множества $B$ мощности, меньшей $k$, выполнено $A \not\subseteq F(B)$. Но из множества $A$ можно выделить максимальное по включению независимое подмножество $A'$. Его мощность $|A'| < k$, и $A \subseteq F(A')$ по определению поверхности. Т. е. $A$ лежит в поверхности ранга, меньшего $k$ — противоречие. $\square$

**Теорема 3.1.** *Для всякого матроида $M = (U, \mathcal{I})$, поверхности которого определены в соответствии с правилом (3.1), выполнены свойства (G1)–(G5):*

*(G1) поверхность ранга* $0$ *существует;*

*(G2) никакая поверхность ранга $k$ не лежит в поверхности ранга $k-1$;*

*(G3) всякая поверхность ранга $k$ и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k+1$;*

*(G4) любые $k$ точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$, лежат в единственной поверхности ранга $k$;*

*(G5) Существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности не превосходит $r$.*

**Доказательство.** Свойство (G1) следует из независимости $\emptyset$. Поверхностью ранга 0 является $F(\emptyset)$.

Свойство (G2) доказывается от противного. Предположим, что существуют такие независимые множества $A$ и $B$, что $|A| = k-1$, $|B| = k$ и $F(B) \subseteq F(A)$. Тогда в силу свойства пополнения (I2) существует элемент $b \in B \setminus A$ такой, что $A \cup b \in \mathcal{I}$. Но поскольку $A \cup b \subseteq F(A)$, то мы получаем противоречие с определением $F(A)$.

Докажем свойство (G3). Пусть $F(A)$ — поверхность ранга $k$ и элемент $b \notin F(A)$. Это означает, что $A \cup b \in \mathcal{I}$. Поэтому в силу следствия 3.1

$F(A \cup b)$ — единственная поверхность ранга $k+1$, содержащая поверхность $F(A)$ и элемент $b$.

Докажем свойство (G4). Пусть $A = \{a_1, ..., a_k\}$ — произвольное множество, которое не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$. По лемме 3.2 оно независимо и, следовательно, лежит в единственной поверхности ранга $k$ в силу следствия 3.1.

Свойство (G5) следует из свойства (I3) матроида. □

Определение комбинаторной предгеометрии в конечном случае выглядит так.

*Комбинаторная предгеометрия* — это пара $(U, \mathcal{F})$, где $U$ — непустое конечное множество *точек*, $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств — *поверхностей*, каждой из которых приписан *ранг* $k \in \mathbb{Z}_+$, обладающих следующими свойствами:

(G1) поверхность ранга 0 существует;

(G2) никакая поверхность ранга $k$ не лежит в поверхности ранга $k-1$;

(G3) всякая поверхность ранга $k$ и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k+1$;

(G4) любые $k$ точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$, лежат в единственной поверхности ранга $k$.

Чтобы определить класс конечномерных *комбинаторных предгеометрий*, включающий как конечные, так и бесконечные объекты, в приведенном выше определении нужно потребовать выполнение свойства (G5):

(G5) Существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности не превосходит $r$.

**Замечание 3.1.** *Несложно проверить, что система аксиом (G1)–(G5) независима, т. е. любая из них не является следствием остальных аксиом.*

**Замечание 3.2.** *В любой комбинаторной предгеометрии существует единственная поверхность ранга* 0 *(это легко доказывается применением аксиом (G1) и (G4) для* $\emptyset$*).*

Множество точек $\{a_1, ..., a_k\}$ называется *независимым множеством* точек комбинаторной предгеометрии, если оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$. Т. е. семейство $\mathcal{I}$ независимых множеств точек определяется следующим образом:

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq U \mid \forall F \in \mathcal{F}\ (\,(r(F) < |A|) \to (A \not\subseteq F)\,)\,\}. \tag{3.2}$$

Заметим, что $\emptyset$ — независимое множество по определению.

**Лемма 3.3.** *Пусть* $A = \{a_1, ..., a_k\}$ *— независимое множество точек,* $F$ *— поверхность ранга* $k$*, такая, что* $A \subseteq F$*. Тогда для любой точки* $a \notin F$ *множество* $A \cup a$ *является независимым множеством точек.*

**Доказательство.** В поверхности ранга, меньшего $k$, множество $A \cup a$ лежать не может, потому что это противоречило бы независимости множества $A$. По свойству (G4) $F$ — единственная поверхность ранга $k$, в которой лежит $A$. Таким образом, множество $A \cup a$ не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k+1$, а значит оно независимо по определению. □

Теперь докажем основные свойства независимых множеств точек комбинаторной предгеометрии.

**Теорема 3.2.** *Во всякой комбинаторной предгеометрии семейство $\mathcal{I}$, определенное по правилу (3.2), обладает следующими свойствами:*

*(I1) любое подмножество независимого множества точек само является независимым множеством (наследственность);*

*(I2) если $A$ и $B$ — произвольные независимые множества точек, для которых выполнено $|B| = |A| + 1$, то существует точка $b \in B \setminus A$ такая, что $A \cup b$ — независимое множество (пополнение);*

*(I3) существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполнено $|A| \leq r$ (конечность ранга).*

**Доказательство.** Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная предгеометрия. В силу свойства (G5) для нее существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности данной комбинаторной предгеометрии не превосходит $r$.

1) Докажем свойство наследственности. Пусть $k \in [1, r]$. Докажем, что любое подмножество независимого множества $A = \{a_1, ..., a_k\}$, состоящее из $k - 1$ точек, является независимым.

Предположим противное, т. е. существует точка $a_i$ такая, что множество точек

$$A_i = A \setminus a_i = \{a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_k\}$$

не является независимым множеством. В этом случае по определению должна существовать поверхность $F$ ранга $l < k - 1$, в которой бы $A_i$ лежало.

Точка $a_i$ не лежит в $F$, иначе все множество $A$ лежало бы в $F$ — поверхности ранга, меньшего $k$, что противоречило бы независимости множества $A$. Тогда по свойству (G3) существует единственная поверхность $H$ ранга $l + 1$, в которой лежат $F$ и $a_i$, а значит и все множество

$A$ лежит в $H$. Поскольку $l < k-1$, то $l+1 < k$, и получается, что множество $A$ лежит в поверхности ранга, меньшего $k$, что противоречит независимости $A$.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что любые подмножества множества $A$, состоящие из $k-2$, $k-3$, ..., 1 точки, будут независимыми.

2) Докажем свойство пополнения. Пусть $A = \{a_1, ..., a_k, c_1, ..., c_l\}$ и $B = \{b_1, ..., b_k, b_{k+1}, c_1, ..., c_l\}$ — независимые множества, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $k+l+1 \leq r$ и $a_i \neq b_j$ для любых $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, k+1\}$. Тогда $A \cap B = \{c_1, ..., c_l\}$.

Предположим противное, что для любой точки $b_j \in B \setminus A$ множество $A \cup b_j$ не является независимым, т. е. существует некоторая поверхность ранга, меньшего $k+l+1$, в которой $A \cup b_j$ лежит.

Поскольку $A$ независимо, оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k+l$. Однако в силу аксиомы (G4) существует единственная поверхность $F$ ранга $k+l$, которая содержит множество $A$. С учетом предположения, что $A \cup b_j$ не является независимым множеством, оно также должно лежать в $F$.

Таким образом, для любой точки $b_j \in B \setminus A$ множество $A \cup b_j$ лежит в $F$, а значит, все множество $B$ лежит в $F$ — поверхности ранга $k+l$, что противоречит независимости $B$.

3) Свойство конечности ранга следует из (G3) и (G5). $\square$

Эквивалентность определения матроида конечного ранга приведенному в предыдущем разделе определению конечномерной комбинаторной предгеометрии вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 3.3.** *1) Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — матроид, где $U$ — непустое множество его элементов, $\mathcal{I}$ — семейство его независимых множеств. Тогда семейство $\mathcal{F}$, определенное по правилу (3.1), обладает свойствами (G1)–(G5), причем имеет место равенство (3.2).*

*2) Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная предгеометрия, где $U$ — непустое множество точек, а $\mathcal{F}$ — семейство ее поверхностей. Тогда семейство $\mathcal{I}$, определенное по правилу (3.2), обладает свойствами (I1)–(I3), причем имеет место равенство (3.1).*

**Доказательство.**

1) Свойства (G1)–(G5) следуют из теоремы 3.1, а равенство (3.2) — из леммы 3.2.

2) Свойства (I1)–(I3) следуют из теоремы 3.2.

Чтобы доказать равенство (3.1), сперва покажем, что всякая поверхность ранга $k$ содержит в себе независимое множество точек мощности $k$. Предположим противное, что для некоторой поверхности $F$ максимальная мощность ее независимого подмножества равна $k-1$. Тогда по свойству (G4) существует единственная поверхность $H$ ранга $k-1$, определенная для некоторого независимого множества $A \subseteq F$ мощности $k-1$. Заметим, что $F$ не содержит точек, не лежащих в $H$, поскольку, если существует точка $a \in F \setminus H$, то в силу леммы 3.3 множество $A \cup a$ является независимым вопреки максимальности множества $A$ в поверхности $F$. Таким образом, $F \subseteq H$, что противоречит аксиоме (G2). Аналогично с использованием аксиомы (G3) можно показать, что мощность максимального независимого подмножества поверхности $F$ не может быть меньше $k-1$.

Теперь докажем равенство (3.1), т. е. тот факт, что любая поверхность $F$ ранга $k$ может быть определена при помощи независимого множества точек $A \subseteq F$ мощности $k$ по правилу:

$$F = A \cup \{u \in U \mid A \cup u \notin \mathcal{I}\}.$$

В силу свойства (G4) поверхность $F$ задается множеством $A$ единственным образом. По лемме 3.3 все точки $u \in U$ такие, что $A \cup u$ не является независимым множеством, лежат в $F$. При этом других точек поверхность $F$ содержать не может, поскольку это бы противоречило введенному понятию независимого множества точек. $\square$

Теперь дадим определения обыкновенного матроида и комбинаторной геометрии.

Обыкновенный матроид — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где $U$ — непустое множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами (I1)–(I3) и, кроме того, свойствами:

(I4) для любого $u \in U$ выполнено $\{u\} \in \mathcal{I}$;

(I5) для любых $u, v \in U$, если $u \neq v$, то $\{u, v\} \in \mathcal{I}$.

*Комбинаторная геометрия* — это комбинаторная предгеометрия, для которой выполнено свойство (G6):

(G6) $\emptyset$ и все точки являются поверхностями.

**Замечание 3.3.** *В любой комбинаторной геометрии поверхностями ранга* 1 *являются точки и только они.*

Из следующей теоремы вытекает эквивалентность предложенного нами определения комбинаторной геометрии определению обыкновенного матроида.

**Теорема 3.4.** *Существует взаимно однозначное соответствие между обыкновенными матроидами и комбинаторными геометриями.*

**Доказательство.** 1) Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — обыкновенный матроид, где $U$ — непустое множество его элементов, $\mathcal{I}$ — семейство его независимых подмножеств. По теореме 3.3 семейство $\mathcal{F}$, определенное по правилу (3.1), обладает свойствами (G1)–(G5), причем имеет место равенство (3.2).

Докажем свойство (G6). По свойству наследственности $\emptyset \in \mathcal{I}$. Таким образом, поверхность ранга 0 совпадает с пустым множеством в силу свойства (I4). Аналогично, поскольку все одноэлементные множества являются независимыми, то для любого из них определяемая им поверхность ранга 1 совпадает с самим одноэлементным множеством в силу свойства (I5).

2) Пусть $(U, \mathcal{F})$ — комбинаторная геометрия, где $U$ — непустое множество точек, а $\mathcal{F}$ — семейство ее поверхностей. По теореме 3.3 семейство $\mathcal{I}$, определенное по правилу (3.2), обладает свойствами (I1)–(I3), причем имеет место равенство (3.1).

Докажем свойство (I4). В силу замечания 3.2 и свойств (G2) и (G4) комбинаторной геометрии $\emptyset$ является единственной поверхностью ранга 0. Поскольку никакая точка не лежит в поверхности ранга 0, то любое множество комбинаторной геометрии, состоящее из единственной точки, является независимым. Таким образом, свойство (I4) доказано.

Теперь докажем свойство (I5). Применив аксиомы (G3) и (G4) к $\emptyset$ и точкам, легко сделать вывод, что в комбинаторной геометрии поверхностями ранга 1 являются все точки и только они. Отсюда следует, что любое множество, состоящее из двух точек, независимо, поскольку оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего 2. $\square$

Соответствие между матроидами конечного ранга и конечномерными комбинаторными предгеометриями, установленное в теореме 3.3, является взаимно однозначным. Поэтому определение комбинаторной предгеометрии можно рассматривать как эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга. Аналогично, из теоремы 3.4 следует, что определение комбинаторной геометрии является эквивалентным определением обыкновенного матроида в данных терминах.

## 3.3 Аксиоматизируемость наследственных классов матроидов

В предыдущем параграфе предложено определение матроида конечного ранга в терминах поверхностей. Чтобы определить матроид ранга, не превосходящего наперёд заданного фиксированного целого неотрицательного числа $r \in \mathbb{Z}_+$, в этом определении нужно изменить условие (G5).

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ — фиксированное число. *Матроид $M$ ранга, не большего $r$*, — это пара $M = (U, \mathcal{F})$, где $U$ — непустое множество *точек*, $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств — *поверхностей*, каждой из которых приписан *ранг* $k \in \mathbb{Z}_+$, обладающих следующими свойствами:

(G1) поверхность ранга 0 существует;

(G2) никакая поверхность ранга $k$ не лежит в поверхности ранга $k-1$;

(G3) всякая поверхность ранга $k$ и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k+1$;

(G4) любые $k$ точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$, лежат в единственной поверхности ранга $k$;

(G5$'$) ранг любой поверхности не превосходит $r$.

Пусть $M = (U, \mathcal{F})$ — матроид ранга, не большего $r$, $A \subseteq U$ — произвольное подмножество. Введём обозначение:

$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда пара $M_A = (A, \mathcal{F}_A)$ является матроидом и называется *подматроидом* исходного матроида $M$. Очевидно, что любой подматроид произвольного матроида $M$ ранга, не большего $r$, является его подсистемой, причем верно также и обратное утверждение. Таким образом, класс матроидов ранга, не большего $r$, является наследственным.

Чтобы определить *матроид фиксированного ранга* $r \in \mathbb{Z}_+$, в приведённое выше определение нужно добавить свойство (G6):

(G6) существует поверхность ранга $r$.

Воспользуемся этими определениями, чтобы доказать следующую теорему.

**Теорема 3.5.** *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ — фиксированное число.*

1) *Класс матроидов ранга, не большего $r$, является конечно $\forall$-аксиоматизируемым.*

2) *Класс матроидов фиксированного ранга $r$ конечно аксиоматизируем, но не является $\forall$-аксиоматизируемым.*

**Доказательство.** 1) Приведём аксиоматику класса матроидов ранга, не большего $r$, на языке логики первого порядка. *Матроид $M$ ранга, не* *большего r,* — это алгебраическая система $M = \langle U, \mathrm{L}_F \rangle$, где $U$ — непустое множество, элементы которого взаимно однозначно соответствуют точкам комбинаторной предгеометрии, а язык $\mathrm{L}_F = \langle F_0, F_1, ..., F_r, = \rangle$ состоит из $r+1$ предикатов поверхностей, местность каждого из которых превосходит на единицу его порядковый номер, и предиката равенства. Истинность предиката $F_k(x_1, ..., x_k, y)$ означает, что:

- множество точек $\{x_1, ..., x_k\}$ не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего $k$;

- множество точек $\{x_1, ..., x_k\}$ лежит в единственной поверхности ранга $k$, т. е. определяет эту поверхность;

- точка $y$ лежит в единственной поверхности, определённой множеством $\{x_1, ..., x_k\}$.

Таким образом, для предикатов $F_k(x_1, ..., x_k, y)$ должны иметь место аксиомы:

(F1) $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ \forall y \ [F_k(x_1, ..., x_k, y) \ \rightarrow \bigwedge\limits_{i \in \{1,...,k\}} F_k(x_1, ..., x_k, x_i)]$, $k \in \{1, ..., r\}$;

(F2) $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ \forall y \ [F_k(x_1, ..., x_k, y) \rightarrow \bigwedge\limits_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$, $k \in \{2, ..., r\}$;

(F3) $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ \forall y \ [F_k(x_1, ..., x_k, y) \rightarrow \bigwedge\limits_{\pi} F_k(\pi(x_1), ..., \pi(x_k), y)]$, где $\pi$ пробегает по всем перестановкам элементов $x_1, ..., x_k$, $k \in \{2, ..., r\}$;

(F4) $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ [F_k(x_1, ..., x_k, x_1) \ \leftrightarrow \ \forall z_1 \ ... \ \forall z_{k-1} \ \neg(\bigwedge\limits_{i \in \{1,...,k\}} F_{k-1}(z_1, ..., z_{k-1}, x_i))]$, $k \in \{1, ..., r\}$;

(F5) $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ \forall y \ \forall z \ [F_k(x_1, ..., x_k, y) \wedge \neg F_k(x_1, ..., x_k, z) \ \rightarrow F_{k+1}(x_1, ..., x_k, z, y)]$, $k \in \{0, ..., r\}$.

С помощью следующих правил будет установлено взаимно однозначное соответствие между этими алгебраическими системами и матроидами ранга, не большего $r$, определёнными условиями (G1)–(G4) и (G5′).

$$F_k(x_1, ..., x_k, y) \leftrightarrow y \text{ лежит в поверхности, определённой } \{x_1, ..., x_k\},$$

$$\text{и } \{x_1, ..., x_k\} \not\subseteq P \text{ для любой поверхности } P \in \mathcal{F} \text{ такой, что } r(P) < k. \tag{3.3}$$

$$\mathcal{F} = \{P = \{y \mid F_k(x_1, ..., x_k, y), \text{ где } \{x_1, ..., x_k\} \text{ — некоторое множество}\}\}. \tag{3.4}$$

a) Пусть $M = (U, \mathcal{F})$ — матроид ранга, не большего $r$, определённый условиями (G1)–(G4) и (G5′).

Покажем, что предикаты $F_k(x_1, ..., x_k, y)$, определённые по правилу (3.3), обладают свойствами (F1)–(F5), причём выполнено равенство (3.4).

(F1) выполнено, поскольку все точки $x_i$ лежат в поверхности $F(x_1, ..., x_k)$.

(F2) выполнено, так как любое множество точек мощности, меньшей $k$, лежит в какой-нибудь поверхности ранга, не большего $k$.

(F3) и (F4) верны в силу (3.3).

(F5) выполнено по свойству (G3).

Докажем равенство (3.4). В любой поверхности ранга $k$ лежит некоторое независимое множество точек $\{x_1, ..., x_k\}$, т. е. множество, не лежащее ни в какой поверхности меньшего ранга. Это верно в силу свойств (G4) и (G2): если предположить, что какая-нибудь поверхность ранга $k$ не содержит независимого множества мощности $k$, то данная поверхность обязательно должна лежать в другой поверхности меньшего ранга.

b) Теперь покажем, что семейство $\mathcal{F}$, определённое по правилу (3.4), обладает свойствами (G1)–(G4) и (G5′), причём имеет место (3.3).

(G1) выполнено в силу существования предиката $F_0(y)$. Если никакая точка не приадлежит поверхности ранга 0, то в этом случае она будет совпадать с $\emptyset$.

Для доказательства свойства (G2) воспользуемся аксиомами группы (F4) "$\rightarrow$". Докажем, что для любых $\{x_i\}$ и $\{z_i\}$

$$F_1 = \{y \mid F_k(x_1, ..., x_k, y)\} \nsubseteq F_2 = \{y \mid F_{k-1}(z_1, ..., z_{k-1}, y)\}.$$

Если предположить противное, то в силу аксиом (F1) было бы выполнено $F_{k-1}(z_1, ..., z_{k-1}, x_i)$ для всех $x_i$, что противоречило бы аксиомам (F4).

(G3) выполнено в силу аксиом (F1) и (F5).

(G4) следует из аксиом из группы (F4) "$\leftarrow$".

(G5$'$) выполнено, поскольку по определению матроида как алгебраической системы задана наибольшая местность предикатов поверхностей, которая является фактическим ограничением на величину ранга любой поверхности.

Докажем свойство (3.3). Для любой поверхности $P \subseteq \mathcal{F}$ такой, что $r(P) < k$, множество точек $\{x_1, ..., x_k\}$ не лежит в $P$ в силу аксиом группы (F4) "$\leftarrow$". То, что $y \in P = \{y \mid F_k(x_1, ..., x_k, y)\}$, очевидно.

2) Чтобы определить *матроид фиксированного ранга* $r$, в приведённое теоретико модельное определение матроида нужно добавить еще одну аксиому:

(F6) $\exists x_1 \ ... \ \exists x_r \ \exists y \ F_r(x_1, ..., x_r, y)$.

Очевидно, что класс матроидов фиксированного ранга не является замкнутым относительно подсистем. Из теоремы 2.2 следует, что класс матроидов фиксированного ранга не является $\forall$-аксиоматизируемым. $\square$

В качестве еще одного примера $\forall$-аксиоматизируемого наследственного класса матроидов рассмотрим класс матроидов разбиения ранга, не большего $r$. Пусть $P = \{U_1, U_2, ..., U_r\}$ — разбиение множества $U$, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Множество $I \subseteq U$ содержится в $\mathcal{I}_P$ тогда и только тогда, когда $|I \cap U_i| \leq 1$ для всех $i \in \{1, ..., r\}$. Тогда пара $M = (U, \mathcal{I}_P)$ является матроидом, который называется *матроидом разбиения* множества $U$, а $\mathcal{I}_P$ — семейство его независимых множеств.

Данный класс интересен своей тесной связью с классом $M$-графов. Граф называется *матроидным* или *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом. Множество вершин $U$ такого графа является множеством элементов матроида разбиения, а вершины, составляющие $i$-ю компоненту связности, соответствуют множеству $U_i$ в разбиении $P$ множества $U$. Поэтому класс матроидов разбиения аксиоматизируем следующим образом.

*Матроид разбиения* ранга, не большего $r$ — это алгебраическая система $\langle U, \mathrm{L}\rangle$, носитель которой $U$ — непустое множество, а язык $\mathrm{L} = \langle E, =\rangle$ состоит из бинарного предиката смежности и предиката равенства, причем выполнены условия иррефлексивности и симметричности, транзитивности и ограничения по рангу:

(M1) $\forall x \forall y\ [\neg E(x,x) \wedge (E(x,y) \to E(y,x))]$;

(M2) $\forall x \forall y \forall z\ [E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)]$;

(M3) $\forall x_1\ ...\ \forall x_r\ \forall y\ [\bigwedge\limits_{i \neq j} (\neg E(x_i, x_j) \wedge (x_i \neq x_j)) \wedge \bigwedge\limits_{i \in \{1,...,r\}} (x_i \neq y) \to \bigvee\limits_{j \in \{1,...,r\}} E(x_j, y)]$.

Заметим, что аксиомы (M1) и (M2) составляют аксиоматику класса $M$-графов. Из теоремы 2.2 легко сделать вывод о замкнутости этого класса относительно подсистем. Таким образом, класс матроидов разбиения ранга, не большего $r$, является наследственным.

Для класса матроидов конечного ранга выполнено следующее утверждение.

**Лемма 3.4.** *Класс матроидов конечного ранга незамкнут относительно ультрапроизведений.*

**Доказательство.** Рассмотрим фильтр Фреше над множеством $\mathbb{N}$, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны. Из леммы 2.1 следует, что существует ультрафильтр $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр Фреше. В силу леммы 2.2 этот ультрафильтр не содержит ни одного конечного множества.

Рассмотрим счетно бесконечное множество матроидов конечного ранга $M_i$, $i \in \mathbb{N}$, причем ранг каждого $M_i$ совпадает с номером $i$. Покажем, что их ультрапроизведение $M/\mathcal{F} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} M_i/\mathcal{F}$ не является матроидом конечного ранга.

Очевидно, что для всякого $M_i$ истинно предложение

$$\varphi_i = \exists x_1 \; ... \; \exists x_i \; I_i(x_1, ..., x_i),$$

означающее существование независимого множества мощности $i$, причем предложение $\varphi_i$ будет также истинным во всех $M_j$, где $j > i$. Т. е. для сколь угодно большого $i$ существует счетно бесконечное множество матроидов $M_j$, в которых предложение $\varphi_i$ истинно. Тогда по теореме 2.3 все $\varphi_i$ будут истинны в ультрапроизведении $M/\mathcal{F}$, т. е. оно не является матроидом конечного ранга, поскольку содержит независимые множества сколь угодно большой мощности. $\square$

В силу леммы 3.4 и теоремы 2.4 справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.6.** *Класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.*

# Заключение

В диссертации изучаются наследственные классы графов, определенные в терминах запрещённых подграфов, и матроиды ограниченного и конечного ранга.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Предложены алгоритмы проверки совместности систем уравнений над конечными обыкновенными графами и алгоритмы построения общего решения таких систем уравнений.

2. Найдены критерии универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизуремого наследственного класса графов.

3. Предложено эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности.

4. Установлена конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга $r$ и двух классов матроидов ранга, не большего $r$. Доказано, что класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

# Литература

[1] Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир, 1982. — 558 с.

[2] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: Графы, матроиды, алгоритмы.* — СПб.: Лань, 2010. — 368 с.

[3] Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий.* — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 368+xii с.

[4] Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. *Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами.* — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. — 243 с.

[5] Дистель Р. *Теория графов.* — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. — 336 с.

[6] Емеличев В.А., Мельников О.И. Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* — М.: Наука, 1990. — 384 с.

[7] Ершов Ю.Л. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* — М.: Наука, 1980. — 416 с.

[8] Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. *Элементарные теории* // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 4. — С. 37–108.

[9] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. *Математическая логика.* — М.: Наука, 1987. — 336 с.

[10] Зыков А.А. *Основы теории графов.* — М.: Вузовская книга, 2004. — 664 с.

[11] Ильев А.В. *О разрешимости универсальных теорий некоторых классов графов* // Труды II Региональной конф. магистрантов, аспирантов и молодых учёных "ФМ ОмГУ 2014". — Омск, 2014. — С. 24–27.

[12] Ильев А.В. *Аксиоматизируемость классов матроидов предписанного ранга* // Труды Междунар. конф. "Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач". — Омск, 2015. — С. 33.

[13] Ильев А.В. *Разрешимость универсальных теорий классов матроидов ограниченного ранга* // Электронный сборник трудов Междунар. конф. "Мальцевские чтения". — Новосибирск, 2015. — С. 184.

[14] Ильев А.В., Ильев В.П. *Аксиоматизируемость наследственных классов графов и матроидов* // Труды 9-й Междунар. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем". — Москва, 2015. — С. 87–89.

[15] Ильев А.В. *Об аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов* // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — Т. 13. — С. 137–147.

[16] Ильев А.В. *Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов* // Труды института

математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 100–111.

[17] Ильев А.В., Ильев В.П. *Определение матроида как геометрической конфигурации* // Материалы XII Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" им. академика О.Б. Лупанова. — Москва, 2016. — С. 246–249.

[18] Ильев А.В., Ильев В.П. *Характеризация матроидов в терминах поверхностей* // Прикладная дискретная математика. — 2016. — № 3(33). — С. 5–15.

[19] Ильев А.В. *О разрешимости универсальных теорий и аксиоматизируемости двух классов комбинаторных геометрий* // Электронный сборник трудов Междунар. конф. "Мальцевские чтения". — Новосибирск, 2016. — С. 186.

[20] Ильев А.В. *Исследование систем уравнений над обыкновенными графами* // Материалы XVIII Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики" под ред. Ю.И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 105–108.

[21] Лавров И.А. *Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий* // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, № 1. — С. 5–18.

[22] Малышев Д.С. *Критические классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 6. — С. 59–76.

[23] Мальцев А.И. *Алгебраические системы.* — М.: Наука, 1970. — 392 с.

[24] Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. — 308 с.

[25] Уилсон Р. *Введение в теорию графов.* — М.: Мир, 1977. — 208 с.

[26] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир, 1973. — 304 с.

[27] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. *Спектры графов. Теория и применение.* — Киев: Наук. думка, 1984. — 384 с

[28] Bozapalidis A., Kalampakas A. *An axiomatization of graphs* // Acta inform. — 2004. — Vol. 41. — P. 19–61.

[29] Bruhn H., Diestel R., Kriesell M., Pendavingh R., Wollan P. *Axioms for infinite matroids* // Advances in Mathematics. — 2013. — V. 239. — P. 18–46.

[30] Brylawski T. *Appendix of matroid cryptomorphisms* // Theory of matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26, ed. by N. White. — Cambridge: Cambridge University Press, 1986. — P. 298–312.

[31] Caicedo X. *Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs* // Algebra Universalis. — 1995. — Vol. 34, no. 2. — P. 314–321.

[32] Crapo H.H., Rota G.-C. *On the foundations of combinatorial theory. II. Combinatorial geometries.* — Cambridge, MA: MIT Press, 1970. — 293 p.

[33] Delucchi E. *Combinatorial geometries in algebra and topology* // Habilitationsschrift. — Universität Bremen, 2011. — 160 p.

[34] Gelfand I.M., Goresky R.M., McPherson R.D., Serganova V. *Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells* // Advances in Mathematics. — 1987. — V. 63. — P. 301–316.

[35] Gordon G., McNulty J. *Matroids: a geometric introduction.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2012. — 410 p.

[36] Johnson D.S. *Approximation algorithms for combinatorial problems* // Journal of Computer and System Sciences. — 1974. — V. 9. — P. 256–278.

[37] Lint J.H. van, Wilson R.M. *A course in combinatorics.* — New York: Cambridge University Press, 2001. — 602 p.

[38] Mac Lane S. *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry* // American J. of Mathematics. — 1936. — V. 58. — P. 236–240.

[39] Marker D. *Model Theory: An Introduction.* — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2002. — 342 p.

[40] Mason J.H. *Matroids as the study of geometrical configurations* // Higher Combinatorics, ed. by M. Aigner. — Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1977. — P. 133–176.

[41] Oxley J. *Matroid theory.* — New York: Oxford University Press, 1992. — 532 p.

[42] Pitsoulis L.S. *Topics in matroid theory.* — New York: Springer-Verlag, 2014. — 127 p.

[43] Razborov A.A. *Flag algebras* // J. of Symbolic Logic. — 2007. — Vol. 72, no. 4. — P. 1239–1282.

[44] Schrijver A. *Combinatorial optimization. V. B.* — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2003. — 1881 p.

[45] Taylor W. *Atomic compactness and graph theory* // Fundamenta Mathematicae. — 1969. — Vol. LXV. — P. 139–145.

[46] Welsh D.J.A. *Matroid theory.* — London–New York–San Francisco: Academic Press, 1976. — 433 p.

[47] White N., ed. *Theory of matroids. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1986. — 316 p.

[48] White N., ed. *Combinatorial geometries. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 29.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1987. — 212 p.

[49] White N., ed. *Matroid applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 40.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1992. — 363 p.

[50] Whitney H. *On the abstract properties of linear dependence* // American J. of Mathematics. — 1935. — V. 57. — P. 509–533.

[51] Yamamoto M., Nishizaki S., Hagiya M., Toda Y. *Formalization of planar graphs* // 8th Int. Workshop on Higer-Order Logic, Theorem

Proving and Its Applications. LNCS. — 1995. — Vol. 971. — P. 369–384.