

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ» (СГУГиТ)

На правах рукописи

УДК 519.21

Логачёв Артём Васильевич

**Принцип умеренно больших уклонений для
решений стохастических уравнений**

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н. С.Я. Махно

Новосибирск 2015

Оглавление

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. Принцип умеренно больших отклонений для случайных процессов, содержащих пуассоновский шум	21
§1. Формулировка основного результата	21
§2. Вспомогательные утверждения, доказательство основной теоремы	24
§3. Принцип умеренно больших отклонений для стохастических уравнений с периодическими коэффициентами	39
§4. Принцип умеренно больших отклонений для некоторых процессов с независимыми приращениями	47
§5. Принцип умеренно больших отклонений для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека	50
ГЛАВА 2. Принцип умеренно больших отклонений для случайных процессов типа телеграфного сигнала	53
§1. Формулировка основных результатов	53
§2. Вспомогательные результаты, доказательства	55
ГЛАВА 3. Принцип умеренно больших отклонений для решений одномерных уравнений Ито	65
§1. Формулировка основных результатов	65
§2. Вспомогательные результаты, доказательства	68
§3. Примеры	78

ГЛАВА 4. Функциональный закон повторного логарифма для стохастических интегралов Ито	80
§1. Формулировка основных результатов	80
§2. Вспомогательные результаты, доказательства	83
§3. Примеры	93
Диффузионный процесс с независимыми приращениями	93
Подинтегральная функция не зависит от $w(t)$	94
Диффузионный процесс в случайной среде	96
Подинтегральная функция зависит от n	97
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	99
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	100

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{R}^m$ – m –мерное векторное пространство;

$\mathbb{C}[a, b]$ – пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций;

$\mathbb{D}[a, b]$ – пространство функций непрерывных справа и имеющих пределы слева, заданных на отрезке $[a, b]$;

$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ – равномерная метрика;

$\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ – норма функции;

$(\mathbb{C}[a, b], \rho)$ – пространство $\mathbb{C}[a, b]$ с заданной на нем равномерной метрикой;

$(\mathbb{D}[a, b], \rho)$ – пространство $\mathbb{D}[a, b]$ с заданной на нем равномерной метрикой;

$\mathbb{AC}_{x_0}[a, b]$ – пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, принимающих значение x_0 в левом конце отрезка;

$\mathbf{L}_2[a, b]$ – пространство суммируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$ функций;

$(\mathbf{Y}, d), (\mathbf{X}, r)$ – произвольные метрические пространства;

$\mathbf{I}(A)$ – индикатор множества A ;

$\mathfrak{B}$ – борелевская σ –алгебра;

Ω – пространство элементарных событий;

ω – элементарное событие;

$\mathfrak{F}_t$ – поток σ –алгебр;

$\mathbf{P}$ – вероятностная мера;

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ – стохастический базис (вероятностное пространство с заданным потоком σ –алгебр);

$\overline{A}$ – дополнение к множеству A ;

$\{A\}^\varepsilon$ – ε окрестность множества A ;

$[a]$ – целая часть числа a ;

$\{a\}$ – дробная часть числа a ;

$\square$ – конец доказательства;

$\nu(t)$ – пуассоновский процесс;

$\tilde{\nu}(t)$ – центрированный пуассоновский процесс;

$\nu(t, A)$ – пуассоновская мера;

$\tilde{\nu}(t, A)$ – центрированная пуассоновская мера;

$\Pi(A)t$ – параметр пуассоновской меры $\nu(t, A)$;

$w(t)$ – винеровский процесс;

$\langle \mu \rangle_t$ – квадратическая характеристика квадратично интегрируемого мартингала $\mu(t)$;

$\overline{\lim}$ – верхний предел;

$\underline{\lim}$ – нижний предел;

$S(x)$ – функционал действия (иногда с нижним индексом или тильдой);

п.б.у. – принцип больших уклонений;

п.у.б.у. – принцип умеренно больших уклонений.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих интересных экономических и физических задачах приходится рассматривать семейства очень маловероятных событий. Оказываясь в некоторых случаях удается идентифицировать показатель экспоненты, задающий скорость убывания (по некоторому параметру) изучаемой вероятности, то есть обосновать принцип больших уклонений для последовательности вероятностных мер.

Теория больших уклонений зародилась в 30-е годы 20 века. У ее истоков стоит работа Крамера Г. [48], посвященная принципу больших уклонений для сумм независимых случайных величин. Дополненные и обобщенные результаты этой работы в современном изложении содержатся в главе 9 [2].

Теория больших уклонений для мер порождаемых случайными процессами в метрических функциональных пространствах начала развиваться в 1960–1970-е годы и интенсивно развивается в наше время. У ее истоков стоят отечественные математики: Боровков А.А., Вентцель А.Д., Могульский А.А., Фрейдлин М.И.; зарубежные математики: Ellis H.R., Gartner J., Donsker M.D., Kurtz T., Varadhan R.S. В 1980-2000-е годы, кроме выше перечисленных математиков, существенный вклад в развитие теории больших уклонений внесли Веретенников А.Ю., Липцер Р.Ш., Махно С.Я., Пухальский А.А., Самойленко И.В., Arcones M.A., Dembo A., Feng J, Lynch J., Zeitouni O.

Основными направлениями развития этой теории в современной математике, являются обоснование принципа больших уклонений для специальных типов случайных процессов, применяемых в современной экономике и теории передачи информации, а также для стохастических дифференци-

альных уравнений с все более и более слабыми условиями на коэффициенты, которые находят широкое применение в электротехнике, физике и астрономии.

Математической моделью таких процессов являются решения дифференциальных уравнений с малыми случайными возмущениями. Естественно ожидать, что при стремлении малого параметра к нулю, поведение решений со случайными возмущениями будет мало отличаться от решения соответствующего детерминированного уравнения. Получить точную формулу для вероятности отклонения этих двух функций в общем случае не представляется возможным. Однако удастся оценить их логарифмическую (грубую) асимптотику. Формула для этой асимптотики содержит две другие функции – функционал действия $S(x)$ и нормирующую функцию $\psi(n)$. Функционал действия характеризует трудность прохождения случайного процесса $X_n(t)$ вблизи достаточно гладкой детерминированной функции $x(t)$, а нормирующая функция определяет асимптотику отклонения:

$$\mathbf{P}\{\rho(X_n, x) < \delta\} \approx \exp\{-\psi(n)S(x)\}.$$

Проведем краткий обзор важных результатов теории больших отклонений, полученных ранее.

В работе Боровкова А.А. [1] получен п.б.у. в функциональных пространствах для ломанных, построенных по случайным блужданиям, а также для винеровского и пуассоновского процессов. Дальнейшее развитие п.б.у. и п.у.б.у. для случайных блужданий получили в работах Боровкова А.А., Боровкова К.А., Могульского А.А. [37], [3], [4], [6]-[8].

Теоремы о больших и умеренно больших отклонений для процессов с независимыми приращениями содержатся в работах Lynch J. и Sethuraman J. [64], Могульского А.А. [66], Могульского А.А. и Боровкова А.А. [5], [9],

Самойленко И.В. [41]. П.б.у. для пуассоновских процессов и мер содержится в работах Arcones M.A. [42], [43].

Теоремы о больших уклонениях для вероятностей перехода марковских процессов и некоторых интегральных и аддитивных функционалов от марковских процессов содержатся в работах Donsker M.D. и Varadhan R.S [50]-[52], Гертнера Ю. [24] и работе Dupuis P. и Ellis R.S. [53].

П.б.у. и п.у.б.у. для марковских процессов в функциональных пространствах изучались в работах Вентцеля А.Д. [13]-[16], [17], Feng J. [55], Фрейдлина М.И. [57], Веретенникова А. Ю. [20] и монографии Фрейдлина М.И. и Вентцеля А.Д. [18].

П.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений при различных условиях на коэффициенты изучался в работах Веретенникова А. Ю. [19], [21], Махно С.Я. [35], Пухальского А.А. [70], Chiang T.S. и Sheu S.J. [46] и монографии Фрейдлина М.И. и Вентцеля А.Д. [18]. П.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений содержащих локальное время получен в работах [59], [47].

П.б.у. и п.у.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром получены в работах Махно С.Я. [36], [34], Веретенникова А.Ю [22], Freidlin M.I. и Sowers R.B [56]. П.у.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром в случайной среде доказан в работе Липцера Р.Ш. и Чиганского П. [29].

Изложим основную идею, которая реализована в диссертационной работе.

В монографии [30] детально рассмотрен вопрос о слабой сходимости семимартингалов. Для обычных процессов, чтобы доказать слабую сходимость доказывают слабую сходимость конечномерных распределений и показывают, что семейство вероятностных мер является плотным. Слабую

сходимость семимартингалов, кроме этого подхода, можно получить из слабых сходимостей абсолютно непрерывной компоненты и квадратической характеристики мартингальной компоненты. В общем случае в силу того, что эти компоненты сами являются случайными процессами это не сильно упрощает задачу. Однако, если мы хотим доказать слабую сходимость семимартингала к процессу с независимыми приращениями, то в этом случае нам надо доказать слабые сходимости абсолютно непрерывной компоненты и квадратической характеристики мартингальной компоненты к детерминированным функциям, что эквивалентно их сходимостям по вероятности. Эта эквивалентность часто существенно упрощает задачу.

Между п.б.у. и слабой сходимостью мер есть некоторая аналогия [68]. В диссертации мы будем получать п.у.б.у. из сходимостей абсолютно непрерывной компоненты и квадратической характеристики мартингальной компоненты к детерминированным функциям с определенной скоростью. Полученный таким образом функционал действия будет всегда совпадать с функционалом действия для некоторого, вообще говоря, неоднородного процесса с независимыми приращениями. Таким образом, мы получим результаты относящиеся к п.у.б.у. аналогичные некоторым результатам из 7-ой главы [30] касающихся слабой сходимости мер. При доказательстве всех результатов диссертации будет использоваться классическая техника без применения теории идемпотентных мер и максингалов, в отличии от монографии Пухальского А.А. [68]. Отметим также работу Гертнера Ю. [23] в которой изучался класс случайных процессов для которого п.б.у. совпадает с п.б.у. для винеровского процесса.

Проведем краткий обзор результатов полученных в диссертации.

В первой главе диссертации получен п.у.б.у. для последовательности

семимартингалов

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t a_n(s, \omega) ds + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u, s, \omega) \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $\tilde{\nu}_n(du, dt)$ мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, $u \in U$; $a_n(t, \omega)$, $f_n(u, t, \omega)$ – случайные процессы; $\varphi(n)$ положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

В качестве иллюстраций получены п.у.б.у. для нормированного интеграла от процесса телеграфного сигнала, для стохастических уравнений с периодическими коэффициентами, для некоторых процессов с независимыми приращениями, для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека.

Начиная с сороковых годов двадцатого века процессы типа телеграфного сигнала широко используются в электротехнике [40], теории связи [67], финансовой математике [45], в теории уравнений в частных производных [58]. В [28] на стр. 9 отмечается, что "в физических модельных задачах в настоящее время в основном используются процессы трех типов: пуассоновский процесс, телеграфный процесс и обобщенный телеграфный процесс". Там же в главе 5 приведено, например, уравнение, описывающее параметрический резонанс, содержащее телеграфный процесс как случайное воздействие, вызывающее флуктуации частоты колебаний. Решения этих уравнений являются функционалами от телеграфного процесса и изучение поведения таких функционалов необходимо для исследования поведения решения соответствующих уравнений. Поэтому предельные теоремы для функционалов от процесса телеграфного сигнала важны для решения описанных выше физических задач. Вторая глава диссертации посвящена п.у.б.у для нормированных интегралов от процессов типа телеграфного

сигнала

$$\eta_n(t) = \frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)} \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) ds,$$

где $\nu(t)$ – процесс Пуассона с параметром λt , $\varphi(n)$ – монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$, параметры $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$. Заметим, что если $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$, то подинтегральной функцией будет обычный процесс телеграфного сигнала $(-1)^{\nu(ns)}$.

В третьей главе диссертации рассмотрена последовательность решений стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s)) ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(n\eta_n(s)) dw(s),$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, $b(x)$ и $\sigma(x)$ – неслучайные функции. Мы обоснуем п.у.б.у. при условии существования у коэффициентов $b(x)$ и $\sigma(x)$ интегральных средних.

В четвертой главе получен функциональный закон типа повторного логарифма для интегралов Ито

$$\theta_n(t) = \frac{\int_0^{nt} f_n(\omega, s) dw(s)}{\varphi(n)\sqrt{n}},$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, случайные процессы $f_n(\omega, t)$ ограничены. При этом условие при котором получен функциональный закон типа повторного логарифма сформулировано в терминах сходимости квадратической характеристики мартингала $\theta_n(t)$. Это условие может быть легко проверено для диффузионных процессов с независимыми приращениями, для случая когда подинтегральная функция не зависит от $w(t)$, для диффузионных процессов с эффектом усреднения. В качестве одного из примеров получен закон повторного логарифма для диффузии в случайной среде.

В начале каждой главы произведено более детальное сравнение полученных результатов с уже известными.

Приведем основные определения и результаты, которые будут использоваться в диссертационной работе.

Определение 1. (см., например, [18] с.111) Семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ на некотором метрическом пространстве $(\mathbf{Y}, d)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $S(y)$ и нормирующей функцией $\psi(n)$, если $\psi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнены следующие условия:

- 1) функционал $S(y)$ полунепрерывен снизу;
- 2) для любого $c > 0$ множество $\Phi(y) = \{y : S(y) \leq c\}$ компактно;
- 3) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}_n(F) \leq -S(F)$ для любого замкнутого множества $F \in \mathfrak{B}(\mathbf{Y}, d)$;
- 4) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}_n(G) \geq -S(G)$; для любого открытого множества $G \in \mathfrak{B}(\mathbf{Y}, d)$, где $S(A) = \inf_{y \in A} S(y)$.

Заметим, что условие 1 следует из условия 2 и пишется лишь по традиции ([11] с.365). В современной литературе если функционал действия удовлетворяет условиям 1-4, то он называется "хорошим", если удовлетворяет условиям 1, 3, 4 и не удовлетворяет условию 2 – "плохим". В данной работе мы будем иметь дело с "хорошими" функционалами действия.

Определение 2. (см., например, [11] с.366) Семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ называется экспоненциально плотным на некотором метрическом пространстве $(\mathbf{Y}, d)$, если для любого $a > 0$ найдется компакт $K_a \subseteq \mathbf{Y}$ такой, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}_n(\overline{K}_a) \leq -a.$$

Заметим, что если семейство мер является экспоненциально плотным,

то существует подпоследовательность $\mathbf{P}_{n_k}$ удовлетворяющая п.б.у. с хорошим функционалом действия [69], [71].

Определение 3. (определение 4.12 [54]) *Последовательность случайных процессов $X_n(t)$ C -экспоненциально плотна в $\mathbb{D}[0, 1]$, если для любого $\delta > 0$*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |X_n(s) - X_n(s-)| \geq \delta \right) = -\infty.$$

Понятие C -экспоненциально плотности это, то условие проверив которое можно получить п.б.у. в пространстве $\mathbb{D}[0, 1]$ с равномерной метрикой. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 0.1. (Теорема 4.14. [54]) *Предположим, что последовательность случайных процессов $X_n(t)$ C -экспоненциально плотна в $\mathbb{D}[0, 1]$ и удовлетворяет п.б.у. с функционалом действия S в пространстве $\mathbb{D}[0, 1]$ с метрикой Скорохода. Тогда п.б.у. выполнен с этим же функционалом действия в пространстве $\mathbb{D}[0, 1]$ с равномерной метрикой.*

Доказательства результатов диссертации связанных с п.б.у. для случайных процессов в функциональных пространствах осуществлены методом предложенным впервые, по видимому, Пухальским А.А. в работе [69]. А именно: п.б.у. в $\mathbb{C}[0, 1]$ или $\mathbb{D}[0, 1] =$ п.б.у. для конечномерных распределений + экспоненциальная плотность последовательности процессов. Сформулируем две теоремы, которые помогут нам реализовать этот метод.

Для получения п.б.у. для конечномерных распределений мы будем пользоваться теоремой Гертнера-Эллиса (см. с.44 [49]).

Рассмотрим последовательность случайных векторов

$$\bar{x}_n(\omega) = (x_n^1(\omega), x_n^2(\omega), \dots, x_n^m(\omega)).$$

Обозначим

$$\Lambda(\bar{\lambda}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{E} \exp\{\psi(n)(\bar{\lambda}, \bar{x}_n)\}.$$

Теорема 0.2. (Гертнер-Эллис) Пусть $\Lambda(\bar{\lambda})$ – существенно гладкая, полунепрерывная снизу функция. Тогда последовательность $\bar{x}_n(\omega)$ удовлетворяет п.б.у. в $\mathbb{R}^m$ с функционалом действия

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m} ((\bar{\lambda}, \bar{y}) - \Lambda(\bar{\lambda})). \text{ (преобразование Фенхеля-Лежандра)}$$

Имея п.б.у. для конечномерных распределений для того чтобы обосновать п.б.у. в $\mathbb{D}[0, 1]$ мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 0.3. (Теорема 4.30. [54]) Пусть последовательность случайных процессов $X_n(t)$ экспоненциально плотна и C -экспоненциально плотна в $\mathbb{D}[0, 1]$. Пусть для любого разбиения $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$ случайные вектора $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_m))$ удовлетворяют п.б.у. в $\mathbb{R}^m$ с функционалом действия $S_{t_1, \dots, t_m}(\bar{x})$. Тогда последовательность $X_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{D}[0, 1]$ с метрикой Скорохода с функционалом действия

$$S(x(t)) = \sup_{\{t_k \in T_0\}} S_{t_1, t_2, \dots, t_m}((x(t_1), \dots, x(t_m))),$$

где всюду плотное множество $T_0 \subseteq [0, 1]$, $x(t) \in \mathbb{D}[0, 1]$.

Также в диссертационной работе будет применяться "contraction principle", который является следствием из теоремы 2.4 [75].

Теорема 0.4. Пусть A – непрерывный оператор, действующий из метрического пространства $(\mathbf{Y}, d)$ в метрическое пространство $(\mathbf{X}, r)$. Тогда, если последовательность случайных элементов η_n удовлетворяет п.б.у. в $(\mathbf{Y}, d)$ с нормирующей функцией ψ_n и функционалом действия $S_1(y)$, $y \in \mathbf{Y}$, то последовательность $A(\eta_n)$ удовлетворяет п.б.у. в $(\mathbf{X}, r)$

с той же нормирующей функцией ψ_n и функционалом действия

$$S_2(x) = \inf_{y:A(y)=x} S_1(y), \quad x \in \mathbf{X}.$$

В основной части диссертации будет использоваться следующая теорема о неразличимости с точки зрения п.б.у. двух процессов.

Рассмотрим две последовательности случайных процессов $X_n(t)$ и $\tilde{X}_n(t)$ траектории которых принадлежат метрическому пространству $(\mathbf{Y}, d)$.

Теорема 0.5. (Теорема 4.2.13 [54]) *Пусть последовательность случайных процессов $X_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $(\mathbf{Y}, d)$ с функционалом действия $S(y)$ и нормирующей функцией $\psi(n)$.*

Пусть для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(d(X_n, \tilde{X}_n) > \delta) = -\infty.$$

Тогда последовательность случайных процессов $\tilde{X}_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $(\mathbf{Y}, d)$ с тем же функционалом действия $S(y)$ и той же нормирующей функцией $\psi(n)$.

Актуальность работы. Проблемы предельного поведения различных объектов в теории вероятностей вообще и в теории случайных процессов в частности, всегда находятся в центре внимания исследователей. Вспомним классические теоремы Муавра-Лапласа, Пуассона, центральную предельную теорему, закон повторного логарифма и так далее. В работе получена асимптотика больших уклонений для важных с практической точки зрения классов семимартингалов. Также в работе доказан функциональный закон повторного логарифма для широкого класса интегралов Ито. Полученные результаты, в частности, могут быть применены в математической статистике при исследовании свойств оценок параметров стохастических уравнений по наблюдениям за траекториями случайного процесса.

В силу приведенного выше, исследование предельных свойств случайных процессов вообще и стохастических уравнений в частности, является актуальной задачей и целесообразно проводить исследования в этой области.

Научная новизна полученных результатов. Основными результатами, которые определяют научную новизну и выносятся на защиту, являются следующие:

- 1) п.у.б.у. для семимартингалов содержащих интеграл по пуассоновской мере;
- 2) п.у.б.у. для стохастических уравнений с периодическими коэффициентами содержащих интеграл по пуассоновской мере и не содержащих диффузии;
- 3) п.у.б.у. для нормированных интегралов от процессов типа телеграфного сигнала;
- 4) п.у.б.у. для стохастических уравнений Ито при условии существования интегральных средних у коэффициентов;
- 5) функциональный закон повторного логарифма для интегралов Ито, полученный в терминах сходимости квадратических характеристик, в частности, получен закон повторного логарифма для диффузии в случайной среде.

Указанные результаты являются новыми или обобщают известные ранее.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Результаты диссертации получены при исследованиях, проводимых в отделе теории вероятностей и математической статистики ИПММ НАН Украины в г. Донецке по темам : "Асимптотический анализ в теории случайных процессов, теории стохастических уравнений, задачах математической

статистики" (шифр темы – III-4-04, номер государственной регистрации №0104U000861), "Стохастические уравнения. Качественные и асимптотические свойства"(шифр темы – III-4-09, номер государственной регистрации №0109U002772) и "Асимптотические свойства решений стохастических уравнений" (шифр темы – III-4-14, номер государственной регистрации №0114U002023).

Цель и задачи исследования. Объектом исследования данной диссертации являются случайные процессы. Предметом исследования являются последовательности случайных процессов, содержащих пуассоновский шум и последовательности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито. Основная **цель** диссертации – обосновать принцип умеренно больших уклонений для вышеописанных последовательностей. Другой **целью** диссертации является доказательство закона типа повторного логарифма для интегралов Ито.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Изложенные в ней результаты могут быть использованы при изучении прикладных проблем, с целью оценки вероятностей маловероятных событий.

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в 6 работах. Работа [61] написана в соавторстве с Махно С.Я. В данной работе Махно С.Я. принадлежат постановка задач и выбор метода исследования. Соискателю принадлежат доказательства основных результатов.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научных семинарах.

1. Международной конференции "Modern problem and new trends in probability theory"(19-26 июня 2005 г., г. Черновцы, Украина);

2. Международной конференции "Skorokhod space. 50 years on"(17-23 июня 2007 г., г. Киев, Украина);
3. Всеукраинской конференции "Современные проблемы теории вероятностей и смежные вопросы" в честь 90-летия со дня рождения Гихмана И.И. (24-26 мая 2008 г., г. Умань, Украина);
4. Международной конференции "Conference on Stochastic Models and their Applications"(22-24 августа 2011 г., г. Дебрецен, Венгрия);
5. Международной конференции посвященной 120-летию со дня рождения Стефана Банаха (17-21 сентября 2012 г., г. Львов, Украина);
6. Научном семинаре "Исчисление Маллявена и его приложения" Института математики НАН Украины, г. Киев (руководитель семинара доктор физ.-мат. наук, проф. Дороговцев А.А.);
7. Научном семинаре кафедры математического анализа и теории вероятностей Национального технического университета Украины (КПИ), г. Киев (руководитель семинара доктор физ.-мат. наук, проф. Булдыгин В.В.) в 2009 г.;
8. Научном семинаре "Теория вероятностей и математическая статистика" кафедры теории вероятностей и математической статистики Киевского национального университета им. Т. Шевченко, г. Киев (руководители семинара доктор физ.-мат. наук, проф. Мишура Ю.С., доктор физ.-мат. наук, проф. Козаченко Ю.В.);
9. Научном семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк (руководитель семинара доктор физ.-мат. наук Махно С.Я.);
10. Научном семинаре лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск (руководитель семинара академик РАН Боровков А.А.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 6-ти рецензируемых журналах, 2-ух тезисах к конференциям.

1) Логачёв А.В. Предельная теорема для интеграла от телеграфного сигнала // Прикладна статистика актуарна та фінансова математика. - 2003. - №1-2. – С. 77-86.

2) Logachov A. Large deviation principle for processes with Poisson noise term // Theory of Stochastic Processes. - 2012 - v. 18(34). - №2. - p. 59-76.

3) Logachov A.V. Makhno S.Y. Large deviations for integrals of telegraph processes type // Random Operators and Stochastic Equations. – 2014. – v. 22. – №1. – p. 43-52.

4) Логачёв А.В. Большие отклонения для решений одномерных уравнений Ито // Теорія ймовірностей та математична статистика.- 2014. - т. 90. - С. 113–122.

5) Логачёв А.В. Функциональный закон повторного логарифма для стохастических интегралов Ито // Український математичний вісник. - 2014. - т. 11. - №4. – С. 508-523.

6) Logachov A.V. The functional law of iterated logarithm for Ito stochastic integrals // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. - v. 207. - №1. – pp. 47-58.

7) Logachov A. Functional Law of the Iterated Logarithm for some martingales in random environment // Abstracts of International conference "Conference on Stochastic Models and their Applications". - Debrecen (Hungary). – 2011. – p. 48-49.

8) Логачев А.В. Принцип больших отклонений для процесса Пуассона // Тезисы конференции "Современные проблемы теории вероятностей и смежные вопросы" в честь 90-летия со дня рождения Гихмана И.И. - С. 56.

Работы 3 и 6 входят в базу данных Scopus. Работы 1, 2, 4, 5 входят в перечень ВАК Украины.

Структура диссертации. Диссертация состоит из оглавления, списка основных обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка используемой литературы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Махно Сергею Яковлевичу, а также заведующему кафедрой теории вероятностей и математической статистики Донецкого национального университета д.ф.-м.н. Бондареву Борису Владимировичу за внимание к работе.

ГЛАВА 1.

Принцип умеренно больших уклонений для случайных процессов, содержащих пуассоновский шум

§1. Формулировка основной теоремы.

В этой главе мы будем рассматривать последовательность случайных процессов $\eta_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, которая определена на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ и допускает представление

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t a_n(s, \omega) ds + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u, s, \omega) \tilde{\nu}_n(du, ds), \quad (1)$$

где $\tilde{\nu}_n(du, dt) - \mathfrak{F}_t$ согласованная мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, $u \in U$; процесс $a_n(t, \omega)$ является $\mathfrak{F}_t$ -прогрессивно измеримым; процесс $f_n(u, t, \omega) - \mathfrak{F}_t$ -предсказуем; $\varphi(n)$ положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

Будем считать, что существует константа $\lambda \geq 1$ такая, что для всех $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$

$$\int \exp\{|f_n(u, t, \omega)|\} \mathbf{I}(|f_n(u, t, \omega)| > 1) \Pi(du) \leq \lambda \quad \text{п.н.}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \int f_n^2(u, t, \omega) \Pi(du) \leq \lambda \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Условия (2), (3) являются некоторым ослаблением пары условий [36]

$$|f_n(u, t, \omega)| \leq \lambda \quad \text{п.н.}, \quad \frac{1}{\lambda} \leq \int f_n^2(u, t, \omega) \Pi(du) \leq \lambda \quad \text{п.н.}$$

В дальнейшем символ ω часто будет опускаться. Для сокращения записи иногда будут опускаться и другие аргументы функций, если ясен их вид.

Заметим, что в частном случае процесс (1) может быть решением стохастического уравнения со случайными коэффициентами, т.е.

$$a_n(s, \omega) = A_n(s, \eta_n(s), \omega), \quad f_n(u, s, \omega) = F_n(u, s, \eta_n(s)).$$

Если (1) представляет собой стохастическое уравнение, коэффициенты которого неслучайны и не зависят от n , то принцип больших уклонений обоснован в [17]. Эта схема с зависящими от n коэффициентами рассмотрена в [70]. Условия работ [17], [70] отличны от условий рассмотренных в этой главе.

Сформулируем основную теорему этой главы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

2) *существует такая неслучайная функция $f(t) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$, что для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \int f_n^2(u, s, \omega) \Pi(du) ds - \int_0^t f^2(s) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty,$$

3) *существует такая неслучайная функция $a(t) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$, что для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t a_n(s, \omega) ds - \int_0^t a(s) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty,$$

4) $f_n(u, t)$ *удовлетворяет неравенствам (2) и (3).*

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\dot{x}(t) - a(t))^2}{f^2(t)} dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 1 дает возможность получать теоремы об умеренно больших отклонениях, если абсолютно непрерывная составляющая и характеристика мартингальной составляющей семейства семимартингалов (1) сходятся с определенной скоростью к интегралам от детерминированных функций. Такой подход иллюстрируется обоснованием п.у.б.у. для уравнений и процессов, когда:

1) есть эффект усреднения (§2 – отклонения для нормированного интеграла от процесса телеграфного сигнала, §3 – отклонения для решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами);

2) процесс $\eta_n(t)$ является процессом с независимыми приращениями без непрерывной мартингальной компоненты (§4);

3) уравнение решается в явном виде (§5 – п.у.б.у. для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека).

Результаты этой главы содержатся в работе [62].

§2. Вспомогательные утверждения, доказательство основной теоремы.

В этом параграфе мы докажем теорему 1 после доказательства вспомогательных лемм.

Рассмотрим случайный процесс

$$\tilde{\eta}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u, s, \omega) \tilde{\nu}_n(du, ds).$$

Лемма 1. Пусть выполнены условие 1 теоремы 1, неравенства (2) и

$$\int f_n^2(u, t, \omega) \Pi(du) \leq \lambda \quad \text{n.н.},$$

тогда для любых $0 \leq v < t \leq 1$, $\delta > 0$ найдется $N(\delta, t - v)$: для всех $n > N(\delta, t - v)$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} |\tilde{\eta}_n(r) - \tilde{\eta}_n(v)| \geq \delta \right) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n)\delta^2}{6\lambda(t-v)} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $c > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} |\tilde{\eta}_n(r) - \tilde{\eta}_n(v)| \geq \delta \right) &= \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} \left| \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right| \geq \delta \right) \leq \\ &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} \exp \left\{ \frac{c}{\sqrt{n}} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right\} \geq \exp \{ c\delta\varphi(n) \} \right) + \\ &+ \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} \exp \left\{ \frac{-c}{\sqrt{n}} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right\} \geq \exp \{ c\delta\varphi(n) \} \right) = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2. \end{aligned}$$

Оценим $\mathbf{P}_1$.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} \exp \left\{ \frac{c}{\sqrt{n}} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right\} \geq \exp \{ c\delta\varphi(n) \} \right)$$

$$\pm n \int_v^r \int \left(\exp\left(\frac{cf_n(u, s)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{cf_n(u, s)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \Big\} \geq \exp\{c\delta\varphi(n)\}. \quad (5)$$

В силу неравенства $\frac{x^2}{2} \exp|x| \geq \exp(x) - x - 1$ и разложения в ряд Тейлора для функции $\exp(x)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in [v, t]} n \int_v^r \int \left(\exp\left(\frac{cf_n(u, s)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{cf_n(u, s)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \leq \\ & \leq \sup_{r \in [v, t]} \int_v^r \int \frac{c^2 f_n^2(u, s)}{2} \exp\left(\frac{c|f_n(u, s)|}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{I}(|f_n(u, t)| \leq 1) \Pi(du) ds + \\ & + \sup_{r \in [v, t]} \int_v^r \int \left(\frac{c^2 f_n^2}{2} + \frac{c^3}{\sqrt{n}} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c^{k-3} |f_n^k|}{k! (\sqrt{n})^{k-3}} \right) \mathbf{I}(|f_n| > 1) \Pi(du) ds = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Выбираем $c = c_n = \frac{\varphi(n)\delta}{2\lambda(t-v)}$. Используя условие 1 теоремы 1, неравенства (2) и $\int f_n^2(u, t, \omega) \Pi(du) \leq \lambda$, при достаточно больших n получим следующие оценки

$$\begin{aligned} A_1 & \leq \sup_{r \in [v, t]} \int_v^r \int \frac{c_n^2 f_n^2(u, s)}{2} \exp\left(\frac{c_n}{\sqrt{n}}\right) \Pi(du) ds \leq \\ & \leq (t-v) \frac{c_n^2 \lambda}{2} \exp\left(\frac{c_n}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\varphi^2(n)\delta^2}{6\lambda(t-v)}. \\ A_2 & \leq \frac{\varphi^2(n)\delta^2}{8\lambda(t-v)} + \frac{\varphi^2(n)\delta^2}{24\lambda^2(t-v)^2} \sup_{r \in [v, t]} \int_v^r \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f_n^k|}{k!} \right) \mathbf{I}(|f_n| > 1) \Pi(du) ds \leq \\ & \leq \frac{\varphi^2(n)\delta^2}{6\lambda(t-v)}. \end{aligned}$$

Подставив c_n в (5), используя полученные выше оценки, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{r \in [v, t]} \exp \left\{ \frac{c_n}{\sqrt{n}} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) - \right. \right. \\ & \left. \left. - n \int_v^r \int \left(\exp\left(\frac{c_n f_n(u, s)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{c_n f_n(u, s)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \right\} \geq \right. \end{aligned}$$

$$\geq \exp\left\{\frac{\varphi^2(n)\delta^2}{2\lambda(t-v)} - \frac{\varphi^2(n)\delta^2}{3\lambda(t-v)}\right\}.$$

Применяя неравенство Дуба для стохастически непрерывных мартингалов к мартингалу

$$\exp\left\{\frac{c_n}{\sqrt{n}} \int_v^r \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) - n \int_v^r \int \left(\exp\left(\frac{c_n f_n(u, s)}{\sqrt{n}}\right) - \frac{c_n f_n(u, s)}{\sqrt{n}} - 1\right) \Pi(du) ds\right\},$$

получаем

$$\mathbf{P}_1 \leq \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)\delta^2}{6\lambda(t-v)}\right\}.$$

Аналогично оценивается $\mathbf{P}_2$. $\square$

Лемма 2. *Последовательность случайных процессов $\{\tilde{\eta}_n\}$ C -экспоненциально плотна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{\eta}_n(s) - \tilde{\eta}_n(s-)| \geq \delta\right) &\leq \sum_{k=1}^m \mathbf{P}\left(\sup_{\frac{k-1}{m} \leq s \leq \frac{k}{m}} \left|\tilde{\eta}_n(s) - \tilde{\eta}_n\left(\frac{k-1}{m}\right)\right| \geq \frac{\delta}{2}\right) \leq \\ &\leq 2m \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)\delta^2 m}{24\lambda}\right\}. \end{aligned}$$

Значит, для любых $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{\eta}_n(s) - \tilde{\eta}_n(s-)| \geq \delta\right) \leq -\frac{\delta^2 m}{24\lambda}.$$

Сделав предельный переход при $m \rightarrow +\infty$, получим для любых $\delta > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{\eta}_n(s) - \tilde{\eta}_n(s-)| \geq \delta\right) = -\infty. \square$$

Рассмотрим экспоненциальный мартингал

$$\alpha(t) = \exp\left\{\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \int_0^t \int c(s) g_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) - \right.$$

$$-n \int_0^t \int \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)c(s)g_n(u,s)}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\varphi(n)c(s)g_n(u,s)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \Big\},$$

где $c(s)$ - неслучайная ограниченная функция.

Лемма 3. Пусть $\sup_{s \in [0,t]} |c(s)| \leq \tilde{c}$, а функция $g_n(u, t)$ удовлетворяет неравенствам (2), (3), тогда при достаточно больших n

$$\mathbf{E}\alpha^2(t) \leq \exp(12\lambda\tilde{c}^2\varphi^2(n)t).$$

Доказательство. Используя формулу Ито, получаем

$$\mathbf{E}\alpha^2(t) = 1 + \mathbf{E}n \int_0^t \int \alpha^2(s) \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)c(s)g_n(u,s)}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right)^2 \Pi(du) ds.$$

Используя условия (2), (3), условие 1 теоремы 1 и разложение в ряд Тейлора для функции $\exp(x)$, при достаточно больших n будем иметь

$$\begin{aligned} & n \int \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)c(s)g_n(u,s)}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right)^2 \Pi(du) \leq \\ & \leq n \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^k(n)|g_n^k(u,s)|\tilde{c}^k}{k!(\sqrt{n})^k} \right)^2 \Pi(du) = \\ & = \tilde{c}^2 \int \varphi^2(n)g_n^2(u,s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{k-1}(n)|g_n^{k-1}(u,s)|\tilde{c}^{k-1}}{k!(\sqrt{n})^{k-1}} \right)^2 \mathbf{I}(|g_n(u,s)| \leq 1) \Pi(du) + \\ & + 4\tilde{c}^2 \int \varphi^2(n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{k-1}(n)|g_n^k(u,s)|}{2^k k! \left(\frac{\sqrt{n}}{2\tilde{c}}\right)^{k-1}} \right)^2 \mathbf{I}(|g_n(u,s)| > 1) \Pi(du) \leq \\ & \leq \tilde{c}^2 \int \varphi^2(n)g_n^2(u,s) \exp\{2\} \Pi(du) + \\ & + 4\tilde{c}^2 \int \varphi^2(n) \exp\{|g_n(u,s)|\} \mathbf{I}(|g_n(u,s)| > 1) \Pi(du) \leq 12\varphi^2(n)\lambda\tilde{c}^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{E}\alpha^2(t) \leq 1 + 12\varphi^2(n)\lambda\tilde{c}^2 \mathbf{E} \int_0^t \alpha^2(s) ds.$$

В силу неравенства Гронуолла-Белмана (см. гл.2 §11 [27]) будем иметь

$$\mathbf{E}\alpha^2(t) \leq \exp(12\lambda\tilde{c}^2\varphi^2(n)t).\square$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда семейство мер

$$\mathbf{P}_{n,m}(A) = \mathbf{P}((\tilde{\eta}_n(t_1), \dots, \tilde{\eta}_n(t_m)) \in A),$$

$A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^m)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$, удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $\mathbb{R}^m$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S_1(x) = \frac{x_1^2}{2 \int_0^{t_1} f^2(s) ds} + \sum_{k=2}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds}, \quad x = (x_1, \dots, x_m). \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем используя теорему Гертнера-Эллиса (см. с.44 [49]). Чтобы применить эту теорему нам надо найти для $a \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\}.$$

Оценим сверху и снизу $\mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\} = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{a_k \varphi(n)}{\sqrt{n}} \int_0^{t_k} \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right\} = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l \right) \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $b_k = \sum_{l=k}^m a_l$, $f_{n,m}(u, t) = f_n(u, t) \sum_{k=1}^m b_k \mathbf{I}(t \in [t_{k-1}, t_k))$, через $M(0, t)$ обозначим последовательность экспоненциальных мартингалов

$$\exp \left\{ \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \int_0^t \int f_{n,m}(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds) - \right. \\ \left. - n \int_0^t \int \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) f_{n,m}(u, s)}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\varphi(n) f_{n,m}(u, s)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \right\}.$$

Используя новые обозначения, $\mathbf{E}_1$ можно записать следующим образом

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ n \int_0^{t_m} \int \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) f_{n,m}}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\varphi(n) f_{n,m}}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) ds \right\}.$$

Из разложения функции $\exp(x)$ в ряд Тейлора имеем

$$\frac{x^2}{2} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \exp(x) - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}.$$

В силу этого неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_m} \int \left(\varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2}{2} - \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\varphi^j(n) |f_{n,m}^j|}{j! (\sqrt{n})^{j-2}} \right) \Pi(du) ds \leq \\ & \leq n \int_0^{t_m} \int \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) f_{n,m}}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\varphi(n) f_{n,m}}{\sqrt{n}} - 1 \right) \Pi(du) \leq \\ & \leq \int_0^{t_m} \int \left(\varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\varphi^j(n) |f_{n,m}^j|}{j! (\sqrt{n})^{j-2}} \right) \Pi(du) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим $A_m = \int_0^{t_m} \int \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\varphi^j(n) |f_{n,m}^j|}{j! (\sqrt{n})^{j-2}} \Pi(du) ds$.

Из условия 1 теоремы 1 следует, что найдется $N(a)$, такое, что для всех $n > N$, $1 \leq k \leq m$ будет выполнено неравенство $\frac{b_k \varphi(n)}{\sqrt{n}} < 1$, поэтому

для $n > N$, используя условие 4 теоремы 1 будем иметь

$$\begin{aligned}
A_m &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int \left(\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\varphi^j(n) |b_k^j| |f_n^j|}{j! (\sqrt{n})^{j-2}} \right) \Pi(du) ds \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^m \frac{|b_k|^3 \varphi^3(n)}{\sqrt{n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int \left(\sum_{j=3}^{\infty} \frac{|f_n^j|}{j!} \right) \Pi(du) ds \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^m \frac{|b_k|^3 \varphi^3(n)}{\sqrt{n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int \left(f_n^2 \exp\{1\} \mathbf{I}(|f_n| \leq 1) + \exp\{|f_n|\} \mathbf{I}(|f_n| > 1) \right) \Pi(du) ds \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^m (e+1) \lambda(t_k - t_{k-1}) \frac{|b_k|^3 \varphi^3(n)}{\sqrt{n}} \leq 4 \frac{b^3 \varphi^3(n) \lambda}{\sqrt{n}}, \tag{8}
\end{aligned}$$

где $b = \max_k |b_k|$.

Обозначим

$$B_n^\varepsilon = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \int f_n^2(u, t) \Pi(du) ds - \int_0^t f^2(s) ds \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Оценим сверху $\mathbf{E}_1$. Используя (8) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &\leq \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ \int_0^{t_m} \int \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2}{2} \Pi(du) ds + \frac{4b^3 \varphi^3(n) \lambda}{\sqrt{n}} \right\} = \\
&= \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ \int_0^{t_m} \int \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2}{2} \Pi(du) ds + \frac{4b^3 \varphi^3(n) \lambda}{\sqrt{n}} \right\} (\mathbf{I}(B_n^\varepsilon) + \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon})).
\end{aligned}$$

Используя условие 4 теоремы 1 и тот факт, что $\mathbf{E} M(0, t_m) = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &\leq \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2 \varphi^2(n) \frac{f^2(s)}{2} ds + \varepsilon b_k^2 \varphi^2(n) \right) + \frac{4b^3 \varphi^3(n) \lambda}{\sqrt{n}} \right\} \mathbf{I}(B_n^\varepsilon) + \\
&+ \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ \frac{4b^3 \varphi^3(n) \lambda}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^m \lambda b_k^2 \varphi^2(n) (t_k - t_{k-1}) \right\} \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \exp\left\{m\varepsilon b^2\varphi^2(n) + \frac{4b^3\varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2\varphi^2(n) \frac{f^2(s)}{2} ds\right\} + \\ + \exp\left\{\lambda b^2\varphi^2(n) + \frac{4b^3\varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}}\right\} \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$\mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq (\mathbf{E}M^2(0, t_m) \mathbf{P}(\overline{B_n^\varepsilon}))^{1/2}.$$

Из условия 2 теоремы 1 следует, что при достаточно больших n

$$\mathbf{P}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq \exp\{-18\lambda b^2\varphi^2(n)\}, \quad (9)$$

применив лемму 3, будем иметь

$$\mathbf{E}M^2(0, t_m) \leq \exp(12\lambda b^2\varphi^2(n)). \quad (10)$$

Используя оценки (9), (10) и условие 1 теоремы 1, при достаточно больших n получаем

$$\exp\left\{\lambda b^2\varphi^2(n) + \frac{4b^3\varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}}\right\} \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq \exp(-\lambda b^2\varphi^2(n)).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_1 \leq 2 \exp\left\{m\varepsilon b^2\varphi^2(n) + \frac{4b^3\varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2\varphi^2(n) \frac{f^2(s)}{2} ds\right\}. \quad (11)$$

Оценим снизу $\mathbf{E}_1$. Используя неравенства (7), (8), при достаточно больших n получим

$$\mathbf{E}_1 \geq \exp\left\{-m\varepsilon b^2\varphi^2(n) - \frac{4b^3\varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2\varphi^2(n) \frac{f^2(s)}{2} ds\right\} \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(B_n^\varepsilon).$$

Оценим снизу $\mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(B_n^\varepsilon)$.

Применяя неравенства (9), (10) и тот факт, что $\mathbf{E}M(0, t_m) = 1$, получаем

$$\mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(B_n^\varepsilon) = \mathbf{E}M(0, t_m) - \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \geq$$

$$\geq 1 - \exp\{-3\lambda b^2 \varphi^2(n)\}. \quad (12)$$

В силу неравенства (12) при достаточно больших n будем иметь

$$\mathbf{E}_1 \geq \frac{1}{2} \exp\left\{-m\varepsilon b^2 \varphi^2(n) - \frac{4b^3 \varphi^3(n)\lambda}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2 \varphi^2(n) \frac{f^2(s)}{2} ds\right\}. \quad (13)$$

Используя условие 1 теоремы 1, неравенства (11), (13), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2 \frac{f^2(s)}{2} ds - m\varepsilon b^2 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp\left\{\varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k)\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2 \frac{f^2(s)}{2} ds + m\varepsilon b^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как неравенство (14) верно для любого $\varepsilon > 0$, то сделав предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp\left\{\varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k)\right\} &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} b_k^2 \frac{f^2(s)}{2} ds = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l\right)^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f^2(s)}{2} ds = \Lambda(a). \end{aligned}$$

Найдем преобразование Лежандра для функции $\Lambda(a)$.

$$\Lambda^*(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}^m} \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l\right)^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f^2(s)}{2} ds \right).$$

Обозначим $F(a) = \sum_{k=1}^m a_k x_k - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l\right)^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f^2(s)}{2} ds$.

Элементарными вычислениями находим супремум функции $F(a)$:

$$\Lambda^*(x) = \frac{x_1^2}{2 \int_0^{t_1} f^2(s) ds} + \sum_{k=2}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds}. \square$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда семейство мер

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n(\cdot) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$$

удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\dot{x}(t)^2}{f^2(t)} dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что последовательность случайных процессов $\{\tilde{\eta}_n(\cdot)\}$ экспоненциально плотна. В лемме 2 было доказано, что эта последовательность C -экспоненциально плотна. Поэтому из теорем 4.14 и 4.30 [54] и леммы 4 следует, что

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sup_{\{t_k \in T_0\}} S_1((x(t_1), \dots, x(t_m))) = \\ &= \sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1)}{2 \int_0^{t_1} f^2(s) ds} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds} \right), \end{aligned}$$

где всюду плотное множество $T_0 \subseteq [0, 1]$.

Из условий 2 и 4 теоремы 1 следует, что $\frac{1}{\lambda} \leq f^2(s) \leq \lambda$ почти всюду, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1) - 0}{t_1 - 0} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right) &\leq S_2(x) \leq \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1) - 0}{t_1 - 0} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из теоремы 7 ([38] с.238) следует, что

$$\sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1) - 0}{t_1 - 0} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right) < \infty$$

только для $x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1]$ у которых производная принадлежит пространству $\mathbf{L}_2[0, 1]$. Поэтому из (15) следует, что $S_2(x) = +\infty$ для функций $x(\cdot)$ не принадлежащих множеству $\mathbb{AC}_0[0, 1]$.

Пусть $x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1]$, $\dot{x}(\cdot) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$ тогда

$$S_2(x) = \sup_{\{t_k \in T_0\}} \sum_{k=1}^m \frac{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(s) ds \right)^2}{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds}.$$

Для любых $a, b, c > 0$, $d > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} \geq \frac{(a+b)^2}{c+d}.$$

Поэтому $\sup_{\{t_k \in T_0\}}$ будет достигаться при стремлении шага разбиения к нулю, то есть

$$S_2(x) = \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \sum_{k=1}^m \frac{\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(s) ds \right)^2}{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds}.$$

По теореме 5 ([38] с.237) почти все точки отрезка $[0, 1]$ являются точками Лебега функций $\dot{x}^2(\cdot)$ и $f^2(\cdot)$. Выбирая в качестве T_0 множество точек Лебега функций $\dot{x}^2(\cdot)$ и $f^2(\cdot)$, будем иметь для $\{t_k\} \in T_0$:

$$\lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{x}^2(s) - \dot{x}^2(t_{k-1})| ds = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f^2(s) - f^2(t_{k-1})| ds = 0. \quad (18)$$

Поэтому учитывая, что почти всюду $\frac{1}{\lambda} \leq f^2(\cdot) \leq \lambda$, получаем

$$0 \leq \lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{\dot{x}^2(t_{k-1})}{f^2(t_{k-1})} - \frac{\dot{x}^2(s)}{f^2(s)} \right| ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| \frac{f^2(s)(\dot{x}^2(t_{k-1}) - \dot{x}^2(s)) - \dot{x}^2(s)(f^2(t_{k-1}) - f^2(s))}{f^2(t_{k-1})f^2(s)} \right| ds \leq \\
&\leq \lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{t_k - t_{k-1}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{x}^2(t_{k-1}) - \dot{x}^2(s)| ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}^2(s) |f^2(t_{k-1}) - f^2(s)| ds \right) \leq \\
&\leq \lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \frac{\lambda^2 \dot{x}^2(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f^2(t_{k-1}) - f^2(s)| ds = 0. \tag{19}
\end{aligned}$$

Используя (17), (18), (19), получаем

$$\begin{aligned}
S_2(x) &= \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\left(\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{x}(s) ds \right)^2 (t_k - t_{k-1})}{\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^2(s) ds} = \\
&= \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\dot{x}^2(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}{f^2(t_{k-1})} = \\
&= \lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sup_{\{t_k \in T_0\}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\dot{x}^2(t_{k-1})}{f^2(t_{k-1})} - \frac{\dot{x}^2(s)}{f^2(s)} \right) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\dot{x}^2(s)}{f^2(s)} ds = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\dot{x}^2(s)}{f^2(s)} ds. \square
\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\hat{\eta}_n(t) = x_0 + \int_0^t a(s) ds + \tilde{\eta}_n(t). \tag{20}$$

Используя теорему 2.4 [75] "contraction principle", найдем функционал действия для последовательности (20). В качестве непрерывного отображения

из $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ в $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ выберем оператор $A_{x_0} : x(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$, который задается равенством

$$y(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + x(t).$$

Значит, существует обратный оператор $A_{x_0}^{-1}$, который задается равенством

$$x(t) = y(t) - x_0 - \int_0^t a(s)ds.$$

Поэтому последовательность (20) будет иметь функционал действия

$$S_3(y) = \inf_{x:A(x)=y} S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\dot{y}(t)-a(t))^2}{f^2(t)} dt, & \text{если } y(\cdot) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из условия 3 теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\rho(\eta_n, \hat{\eta}_n) > \varepsilon) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t a_n(s)ds - \int_0^t a(s)ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Значит, по теореме 4.2.13 [49] последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет такому же принципу больших уклонений как и последовательность $\{\hat{\eta}_n\}$. $\square$

Покажем как с помощью теоремы 1 получить п.у.б.у. для последовательности интегралов от процесса телеграфного сигнала.

Лемма 6. Пусть выполнены условия

- 1) случайные процессы $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$ непрерывны с вероятностью 1,
- 2) семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\xi_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n)$ и некоторым функционалом действия $S(x)$.

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(B) = \mathbf{P}(\xi_n(\cdot) \in B)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n)$ и функционалом действия $S(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидным образом следует из того, что случайные процессы $\xi_n(t)$ непрерывны с вероятностью 1 и полноты подпространства $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$. $\square$

Теорема 2. Пусть положительная монотонно возрастающая функция $\varphi(n)$ стремится к $+\infty$ и удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Пусть последовательность процессов $\zeta_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, определенная на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, имеет вид

$$\zeta_n(t) = \frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds, \quad t \in [0, 1],$$

где $\nu(nt) - \mathfrak{F}_t$ согласованный процесс Пуассона с параметром λnt .

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(B) = \mathbf{P}(\zeta_n(\cdot) \in B)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\theta_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda n}\varphi(n)} \left((-1)^{\nu(nt)} - 1 + 2\lambda n \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds \right).$$

Применяя к функции $\frac{\cos(\pi\nu(nt))}{2\sqrt{\lambda n}\varphi(n)}$ формулу Ито см. теорема 1 ([25] с.271),

получаем, что иначе процесс $\theta_n(t)$ можно записать в следующем виде

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda n \varphi(n)}} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns),$$

где $\tilde{\nu}(nt) = \nu(nt) - \lambda nt$.

Так как $f_n(t) = (-1)^{\nu(nt)}$, $f_n^2(t) \equiv 1$, а $\nu(nt)$ можно представить как $\int_0^t \int \nu_n(du, ds)$, где $\nu_n(du, ds)$ – такая мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, что $\int \Pi(du) = \lambda$, то для последовательности $\theta_n(t)$ выполнены условия теоремы 1 с функциями $f^2(t) \equiv 1$, $a(t) \equiv 0$.

Таким образом, семейство мер $\tilde{\mathbf{P}}_n(A) = \mathbf{P}(\theta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия (20).

Покажем, что семейство мер $\mathbf{P}(\zeta_n(\cdot) \in A)$ удовлетворяет такому же принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$.

Для любого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\rho(\zeta_n, \theta_n) > \delta) = \\ & = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda n \varphi(n)}} ((-1)^{\nu(nt)} - 1) \right| > \delta\right) = -\infty. \end{aligned}$$

Значит, по теореме 4.2.13 [49] семейство мер $\mathbf{P}(\zeta_n(\cdot) \in A)$ на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ имеет функционал действия (21). Так как процесс $\zeta_n(t)$ непрерывен с вероятностью 1, то из леммы 6 следует, что он удовлетворяет такому же принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$. $\square$

П.у.б.у. для процессов более общего вида чем $\zeta_n(t)$ будет получен во второй главе.

§3. Принцип умеренно больших уклонений для стохастических уравнений с периодическими коэффициентами.

В этом параграфе мы докажем с помощью теоремы 1 теорему о умеренно больших уклонениях для решений стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Аналогичный результат, а также п.б.у. и принцип сверх больших уклонений для уравнений с интегралом по Винеровскому процессу получен в [56]. П.у.б.у. для решений уравнений с периодическими коэффициентами, которые содержат интеграл по Пуассоновской мере получена в [36], но при наличии невырожденной диффузии.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\eta_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ определенную на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ и являющуюся решениями стохастических уравнений

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t a(\gamma(n)\eta_n(s))ds + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f(u, \gamma(n)\eta_n(s)) \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $\tilde{\nu}_n(du, dt) - \mathfrak{F}_t$ согласованная мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, $u \in U$, неслучайные функции $a(x)$, $\tilde{f}(x) = \int f^2(u, x)\Pi(du)$ непрерывно дифференцируемые и периодические с периодом 1.

Существование и единственность сильного решения у приведенного выше уравнения следуют из теоремы 9.1 [12].

Введем следующие обозначения

$$q = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\tilde{f}(x)} dx}, \quad v = \frac{\int_0^1 \frac{a(x)}{\tilde{f}(x)} dx}{\int_0^1 \frac{1}{\tilde{f}(x)} dx}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$1.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0, \quad 1.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\gamma(n)}} = 0,$$

найдется $\lambda \geq 1$ такое, что для всех u, x выполнены неравенства

$$2.1) |f^2(u, x)| + |\tilde{f}(x)| + |\tilde{f}'(x)| + |a(x)| + |a'(x)| \leq \lambda,$$

$$2.2) \frac{1}{\lambda} \leq \int f^2(u, x) \Pi(du).$$

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2q} \int_0^1 (\dot{x}(t) - v)^2 dt, & \text{если } x(t) \in AC_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что функция $\tilde{f}(x)$ периодическая и непрерывная следует, ограниченность интеграла

$$\int f^2(u, \gamma(n)\eta_n(t)) \Pi(du), \quad (22)$$

из условия 2.1 следует, что ограничен интеграл

$$\int \exp\{|f(u, \gamma(n)\eta_n(t))|\} \mathbf{I}(|f(u, \gamma(n)\eta_n(t))| > 1) \Pi(du), \quad (23)$$

будем считать, что λ выбрано таким образом, что интегралы (22) и (23) меньше λ . Таким образом выполнены условия 1, 4 теоремы 1 и нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t (a(\gamma(n)\eta_n(s)) - v) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty, \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \left(\int f^2(u, \gamma(n)\eta_n(s)) \Pi(du) - q \right) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty. \quad (25)$$

Докажем (24). Обозначим

$$\theta_1(x) = \frac{a(x) - v}{\tilde{f}(x)}.$$

Из того как была определена константа v следует, что

$$\int_0^1 \theta_1(x) dx = 0. \quad (26)$$

Обозначим

$$H_1(x) = \int_0^x \int_0^r \theta_1(s) ds dr.$$

Применив формулу Ито к функции $H_1(\gamma(n)\eta_n(t))$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\gamma(n)\eta_n(t)} \int_0^r \theta_1(s) ds dr = \int_0^{\gamma(n)x_0} \int_0^r \theta_1(s) ds dr + \\ & + \gamma(n) \int_0^t \left(\int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right) a(\gamma(n)\eta_n(r)) dr + \\ & + n \int_0^t \int \left[H_1 \left(\gamma(n)\eta_n(r) + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \right) - H_1(\gamma(n)\eta_n(r)) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right] \Pi(du) dr + \\ & + \int_0^t \int \left[H_1 \left(\gamma(n)\eta_n(r) + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \right) - \right. \\ & \quad \left. - H_1(\gamma(n)\eta_n(r)) \right] \tilde{\nu}_n(du, dr). \end{aligned} \quad (27)$$

Из формулы Тейлора с тремя первыми членами и остаточным членом в форме Лагранжа следует, что

$$H_1 \left(\gamma(n)\eta_n(r) + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \right) = H_1(\gamma(n)\eta_n(r)) +$$

$$+ \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s)ds + \theta_1(\gamma(n)\eta_n(r)) \frac{\gamma^2(n)f^2(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{2n\varphi^2(n)} + \rho_n(u, r),$$

где функция

$$\rho_n(u, r) \leq \frac{\gamma^3(n)f^3(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{n^{3/2}\varphi^3(n)} \sup_x |\theta'_1(x)|.$$

Из условия 2.1 следует, что для всех u, r

$$|\rho_n(u, r)| \leq \frac{3\lambda^7 \gamma^3(n)f^2(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{n^{3/2}\varphi^3(n)}. \quad (28)$$

Значит,

$$\begin{aligned} n \int_0^t \int \left[H_1 \left(\gamma(n)\eta_n(r) + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \right) - H_1(\gamma(n)\eta_n(r)) - \right. \\ \left. - \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s)ds \right] \Pi(du)dr = \\ = \frac{\gamma^2(n)}{2\varphi^2(n)} \int_0^t (a(\gamma(n)\eta_n(r)) - v)dr + n \int_0^t \int \rho_n(u, r) \Pi(du)dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Из формулы Тейлора с двумя первыми членами и остаточным членом в форме Лагранжа следует, что

$$\begin{aligned} H_1 \left(\gamma(n)\eta_n(r) + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \right) = H_1(\gamma(n)\eta_n(r)) + \\ + \frac{\gamma(n)f(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s)ds + \tilde{\rho}_n(u, r), \end{aligned} \quad (30)$$

где остаточный член, в силу условия 2.1 удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{\rho}_n(u, r)| \leq \frac{\lambda^5 \gamma^2(n)f^2(u, \gamma(n)\eta_n(r))}{n\varphi^2(n)}. \quad (31)$$

Из (27), (29), (30) получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^t (a(\gamma(n)\eta_n(r)) - v) dr &= \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \int_0^{\gamma(n)\eta_n(t)} \int_0^r \theta_1(s) ds dr - \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \int_0^{\gamma(n)x_0} \int_0^r \theta_1(s) ds dr - \\
&\quad - \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma(n)} \int_0^t \left(\int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right) a(\gamma(n)\eta_n(r)) dr - \\
&\quad - \frac{2\varphi(n)}{\gamma(n)\sqrt{n}} \int_0^t \int \left(\int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right) f(u, \gamma(n)\eta_n(r)) \tilde{v}_n(du, dr) - \\
&\quad - \frac{2\varphi^2(n)n}{\gamma^2(n)} \int_0^t \int \rho_n(u, r) \Pi(du) dr - \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \int_0^t \int \tilde{\rho}_n(u, r) \tilde{v}_n(du, dr) = \\
&\quad = I_1(t) - I_2 - I_3(t) - I_4(t) - I_5(t) - I_6(t). \tag{32}
\end{aligned}$$

Оценим сверху абсолютные величины слагаемых, которые стоят в правой части равенства (32). Из (26) и того, что функция $\theta_1(x)$ периодическая с периодом 1 следует, что существует константа $\lambda \geq 1$:

$$\sup_r \int_0^r \theta_1(x) dx \leq \frac{\lambda}{2}, \tag{33}$$

здесь мы предполагаем, что λ выбрано таким образом, что интегралы (22) и (23) меньше λ .

Используя (33), получаем почти наверное

$$|I_1(t)| = \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \left| \int_0^{\gamma(n)\eta_n(t)} \int_0^r \theta_1(s) ds dr \right| \leq \frac{\varphi^2(n)\lambda}{\gamma(n)} \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)|, \tag{34}$$

$$|I_2| = \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \left| \int_0^{\gamma(n)x_0} \int_0^r \theta_1(s) ds dr \right| \leq \frac{\varphi^2(n)\lambda}{\gamma(n)} |x_0|. \tag{35}$$

Из условия 2.1 и (33) следует, что почти наверное

$$|I_3(t)| = \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma(n)} \left| \int_0^t \left(\int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right) a(\gamma(n)\eta_n(r)) dr \right| \leq \frac{\varphi^2(n)\lambda^2}{\gamma(n)}. \quad (36)$$

Для $c > \lambda + |x_0|$ обозначим

$$B_c = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)| > c\}.$$

Используя лемму 1, условие 1.1, учитывая, что $\sup_x |a(x)| \leq \lambda$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_c) &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \left| \int_0^t \int f(u, \gamma(n)\eta_n(s)) \tilde{\nu}_n(du, ds) \right| \geq c - \lambda - |x_0| \right) \leq \\ &\leq 2 \exp\left\{ -\frac{\varphi^2(n)(c - \lambda - |x_0|)^2}{6\lambda} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$D_\delta = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} |I_4(t)| > \delta \right\}.$$

Используя условие 1.2, при достаточно больших n для любого $c > 0$ получим

$$D_\delta \subseteq \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{2}{c\varphi(n)\sqrt{n}} \int_0^t \int \left(\int_0^{\gamma(n)\eta_n(r)} \theta_1(s) ds \right) f(u, \gamma(n)\eta_n(r)) \tilde{\nu}_n(du, dr) \right| > \delta \right\}.$$

Применяя лемму 1, учитывая условие 1.1 и неравенство (33), получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |I_4(t)| > \delta\right) = \mathbf{P}(D_\delta) \leq 2 \exp\left\{ -\frac{\varphi^2(n)\delta^2 c^2}{6\lambda^2} \right\}. \quad (38)$$

Обозначим

$$G_\delta = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{2\varphi^2(n)}{\gamma^2(n)} \int_0^t \int \tilde{\rho}_n(u, r) \tilde{\nu}_n(du, dr) \right| > \delta \right\}.$$

Применяя лемму 1, учитывая условие 1.1 и (31), при достаточно больших n для любого $c > 0$ будем иметь

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |I_6(t)| > \delta) = \mathbf{P}(G_\delta) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n) \delta^2 c^2}{6\lambda^2} \right\}. \quad (39)$$

Из (28) следует, что почти наверно при достаточно больших n для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |I_5(t)| &= \frac{2\varphi^2(n)n}{\gamma^2(n)} \int_0^t \int \rho_n(u, r) \Pi(du) dr \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\lambda} \int_0^t \int f^2(u, \gamma(n)\eta_n(r)) \Pi(du) dr \leq \lambda \delta. \end{aligned} \quad (40)$$

Обозначим

$$H_1^\delta = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |I_1(t)| > \delta\}, \quad H_2^\delta = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |I_2| > \delta\},$$

$$H_3^\delta = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |I_3(t)| > \delta\}, \quad H_4^\delta = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |I_5(t)| > \delta\},$$

$$A_\varepsilon = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (a(\gamma(n)\eta_n(s)) - v) ds \right| > \varepsilon \right\}.$$

Используя (32) и оценки (34)-(40) для любого $c > \lambda + |x_0|$, учитывая условие 1.2, при достаточно больших n получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_\varepsilon) &\leq \mathbf{P}(A_\varepsilon \cap \overline{B_c}) + \mathbf{P}(B_c) \leq \\ &\leq \mathbf{P}((H_1^{\varepsilon/6} \cup H_2^{\varepsilon/6} \cup H_3^{\varepsilon/6} \cup H_4^{\varepsilon/6} \cup D_{\varepsilon/6} \cup G_{\varepsilon/6}) \cap \overline{B_c}) + \mathbf{P}(B_c) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\frac{\varphi^2(n)\lambda c}{\gamma(n)} \geq \frac{\varepsilon}{6}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\varphi^2(n)\lambda |x_0|}{\gamma(n)} \geq \frac{\varepsilon}{6}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\varphi^2(n)\lambda^2}{\gamma(n)} \geq \frac{\varepsilon}{6}\right) + \\ &+ 2 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)\varepsilon^2 c^2}{216\lambda^2}\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)\varepsilon^2 c^2}{216\lambda^2}\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)(c - \lambda - |x_0|)^2}{6\lambda}\right\} = \\ &= 4 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)\varepsilon^2 c^2}{216\lambda^2}\right\} + 2 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n)(c - \lambda - |x_0|)^2}{6\lambda}\right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq 6 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n)(c - \lambda - |x_0|)^2 \min(1, \varepsilon^2)}{216\lambda} \right\}. \quad (41)$$

Используя (41), для любого $c > \lambda + |x_0|$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(A_\varepsilon) \leq -\frac{(c - \lambda - |x_0|)^2 \min(1, \varepsilon^2)}{216\lambda}.$$

Перейдя к пределу при $c \rightarrow +\infty$, получим (24).

Если взять

$$\theta_2(x) = 1 - \frac{q}{\tilde{f}(x)},$$

рассмотреть функцию

$$H_2(x) = \int_0^x \int_0^r \theta_2(s) ds dr$$

и применить формулу Ито к функции $H_2(\gamma(n)\eta_n(t))$, то проделав рассуждения полностью аналогичные вышеизложенным, получим (25). $\square$

Приведем пример. Пусть

$$\eta_n(t) = \int_0^t \frac{ds}{5 + \sin(2\pi n^{2/3}\eta_n(s))} + \frac{1}{n^{3/4}} \int_0^t \int \frac{l(u)}{\sqrt{5 + \cos(2\pi n^{2/3}\eta_n(s))}} \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $l(u)$ такая функция, что $\int l^2(u) \Pi(du) = 1$, и $l^2(u) \leq \lambda$, тогда выполнены условия теоремы 3 с $\varphi(n) = n^{1/4}$, $\gamma(n) = n^{2/3}$. Нормирующей функцией будет $\psi(n) = n^{1/2}$, $q = 1/5$, $v = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, функционал действия будет иметь вид

$$S(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \int_0^1 \left(\dot{x}(t) - \frac{1}{2\sqrt{6}} \right)^2 dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§4. Принцип умеренно больших уклонений для некоторых процессов с независимыми приращениями.

В этом параграфе мы покажем как с помощью теоремы 1 получить непосредственно п.у.б.у. для некоторых процессов с независимыми приращениями, не содержащих в своем представлении интегралов по винеровскому процессу.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\eta_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, определенную на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ и допускающую представление

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t a_n(s) ds + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u, s) \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $\tilde{\nu}_n(du, dt) - \mathfrak{F}_t$ согласованная мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, $u \in U$, $a_n(t)$ и $f_n(u, t)$ – неслучайные функции, $\varphi(n)$ – положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

Заметим, что п.у.б.у. для однородных процессов с независимыми приращениями получен в гораздо более общем случае в работе [66]. П.б.у. для однородных процессов с независимыми приращениями содержится в работах [64], [5].

Так как подинтегральные функции, вообще говоря, зависят от времени, то процесс $\eta_n(t)$ может не быть однородным. Однако, по видимому, результат этого параграфа может быть получен из работы [66] путем применения теоремы 2.4 [75] "contraction principle".

Будем считать, что существует константа $\lambda \geq 1$ такая, что для всех $u \in U$, $t \in [0, 1]$

$$\int \exp\{|f_n(u, t)|\} \mathbf{I}(|f_n(u, t)| > 1) \Pi(du) \leq \lambda, \quad (42)$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \int f_n^2(u, t) \Pi(du) \leq \lambda.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0,$$

2) существует такая функция $f(t) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t \int f_n^2(u, s) \Pi(du) ds - \int_0^t f^2(s) ds \right| \leq \varepsilon,$$

3) существует такая функция $a(t) \in \mathbf{L}_2[0, 1]$, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t a_n(s) ds - \int_0^t a(s) ds \right| \leq \varepsilon,$$

4) функция $f_n(u, t)$ удовлетворяет условию (42).

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\dot{x}(t) - a(t))^2}{f^2(t)} dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы очевидным образом следует из теоремы 1. $\square$

Приведем пример. Пусть

$$\eta_n(t) = \int_0^t \sin(n^3 s) ds + \frac{1}{n^{9/14}} \int_0^t \int \sqrt{5 + \cos(n^7 s)} l(u) \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $l(u)$ такая функция, что $\int l^2(u) \Pi(du) = 1$, и $l^2(u) \leq \lambda$, тогда выполнены условия теоремы 4 с $\varphi(n) = n^{1/7}$.

Нормирующей функцией будет $\psi(n) = n^{1/14}$, функционал действия будет иметь вид

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{A}\mathbb{C}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§5. Принцип умеренно больших уклонений для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека.

В этом разделе мы докажем с помощью теоремы 1 п.у.б.у. для обобщенного процесса Орнштейна-Уленбека. Заметим, что в [72] доказывалась подобная теорема для случая когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = k > 0$, т.е. получен п.б.у.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\mu_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, определенную на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ и являющуюся решением линейного уравнения

$$\mu_n(t) = x_0 + a_n \int_0^t \mu_n(s) ds + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u) \tilde{\nu}_n(du, ds),$$

где $\tilde{\nu}_n(du, dt) - \mathfrak{F}_t$ согласованная мартингальная пуассоновская мера с параметром $n\Pi(du)dt$, $u \in U$, a_n – числовая последовательность, $f_n(u)$ – последовательность неслучайных функций, $\varphi(n)$ – положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

Будем считать, что существует константа $\lambda \geq 1$ такая, что для всех $u \in U$,

$$|f_n(u)| \leq \lambda, \quad \frac{1}{\lambda} \leq \int f_n^2(u) \Pi(du) \leq \lambda. \quad (43)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены условия

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$,

2) существует такая константа f^2 , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n^2(u) \Pi(du) = f^2,$$

3) существует такая константа k , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k,$$

4) последовательность $f_n^2(u)$ удовлетворяет неравенствам (43).

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\mu_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2f^2} \int_0^1 (\dot{x}(t) - kx(t))^2 dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случайный процесс $\mu_n(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$\mu_n(t) = x_0 e^{a_n t} + \frac{e^{a_n t}}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u) e^{-a_n s} \tilde{\nu}_n(du, ds) = e^{a_n t} \tilde{\mu}_n(t), \quad (44)$$

где $\tilde{\mu}_n(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^t \int f_n(u) e^{-a_n s} \tilde{\nu}_n(du, ds)$.

Из условий 1, 2, 3, 4 теоремы 5 следует, что случайный процесс $\tilde{\mu}_n(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 с функциями $a(t) = 0$, $f^2(t) = f^2 e^{-2kt}$. Поэтому последовательность $\tilde{\mu}_n(t)$ будет удовлетворять принципу больших уклонений с функционалом действия

$$S_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2f^2} \int_0^1 \dot{x}^2(t) e^{2kt} dt, & \text{если } x(t) \in AC_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим $\bar{\mu}_n(t) = e^{kt} \tilde{\mu}_n(t)$. Так как отображение $A(x(t)) = e^{kt} x(t)$ действующее из пространства $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ в $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ является непрерывным, то для того чтобы получить функционал действия для последовательности $\bar{\mu}_n(t)$ можно применить теорему 2.4 [75] "contraction principle"

$$S(x) = \inf_{y: A(y)=x} S_3(y) = \begin{cases} \frac{1}{2f^2} \int_0^1 (\dot{x}(t) - kx(t))^2 dt, & \text{если } x(t) \in AC_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из условий 2, 4 теоремы 5 следует, что при всех достаточно больших n и любых $t \in [0, 1]$ будет выполнено неравенство $\int f_n^2(u) e^{-2a_n t} \Pi(du) \leq 2\lambda e^{2|k|}$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int \exp\{e^{-a_n t} |f_n(u)|\} \mathbf{I}(e^{-a_n t} |f_n(u)| > 1) \Pi(du) \leq \\ & \leq \int \exp\{2e^{|k|} \lambda\} f_n^2(u) e^{-2a_n t} \Pi(du) \leq 2 \exp\{2e^{|k|} \lambda\} \lambda e^{2|k|}. \end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{\lambda} = 2 \exp\{2e^{|k|} \lambda\} \lambda e^{2|k|}$. Применяя лемму 1, для любого $c > 0$ и достаточно больших n , будем иметь

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{\mu}_n(t)| \geq c + |x_0|) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varphi^2(n) c^2}{6\tilde{\lambda}}\right\}. \quad (45)$$

Из условия 3 теоремы 5, (44) и неравенство (45) следует, что для любых $c > 0, \delta > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\mu_n(t) - \bar{\mu}_n(t)| > \delta) \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \left(\mathbf{P}(\{\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{\mu}_n(t)(e^{kt} - e^{a_n t})| > \delta\} \cap \{\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{\mu}_n(t)| < c + |x_0|\}) + \right. \\ & \left. + \mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{\mu}_n(t)| \geq c + |x_0|) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\tilde{\mu}_n(t)| \geq c + |x_0|) \leq -\frac{c^2}{6\tilde{\lambda}}. \end{aligned}$$

Сделав предельный переход при $c \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\mu_n(t) - \bar{\mu}_n(t)| > \delta) = -\infty,$$

откуда по теореме 4.2.13 [49], последовательности случайных процессов $\mu_n(t)$ и $\bar{\mu}_n(t)$ удовлетворяют принципу больших уклонений с одинаковым функционалом действия. $\square$

ГЛАВА 2.

Принцип умеренно больших уклонений для случайных процессов типа телеграфного сигнала

§1. Формулировка основных результатов.

Эта глава посвящена вопросу об умеренно больших уклонениях для последовательности случайных процессов $\eta_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, определенной на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$, вида

$$\eta_n(t) = \frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)} \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) ds. \quad (46)$$

Здесь $\nu(t) - \mathfrak{F}_t$ согласованный процесс Пуассона с параметром λt , $\varphi(n)$ – монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$, параметры $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$.

Выбор вида подынтегральной функции в (46) обусловлен тем, что при $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$ процесс $\eta_n(t)$ имеет вид $\eta_n(t) = \frac{\sqrt{\lambda n}}{\varphi(n)} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds$, то есть является нормированным интегралом от процесса телеграфного сигнала.

Отметим результаты полученные для процессов типа (46) ранее. В монографии ([74] с.32-46) Stroock D.W. доказал, что меры, порожденные последовательностью процессов

$$\sqrt{\lambda n} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds$$

в пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций слабо сходятся к мере, соответствующей винеровскому процессу. Этот же результат следует из работы [32].

Из работы [44] следует слабая сходимость к $\frac{w(t)}{\sqrt{2}}$ последовательностей случайных процессов

$$\sqrt{\lambda n} \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns)) ds \text{ и } \sqrt{\lambda n} \int_0^t \sin(\alpha \nu(ns)) ds,$$

где $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Мы получим п.у.б.у. для последовательности (46).

Теорема 6. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$.

Справедливы следующие утверждения.

1) Если $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, то семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S_1(x) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) Если $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$, то семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cos^2(\beta)} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что п.у.б.у. для случая $\alpha = \pi$, $\beta = 2\pi$ был получен в предыдущей главе в теореме 2. Как будет видно в следующем параграфе, техника которая будет использоваться заключается в приведении процессов типа (46) к неразличимым с точки зрения п.б.у. процессам типа (1). При этом, вообще говоря, условие невырожденности (3) будет нарушаться.

Результаты этой главы содержатся в работе [61].

§2. Вспомогательные утверждения, доказательства.

Определим центрированный пуассоновский процесс $\tilde{\nu}(t) = \nu(t) - \lambda t$ и рассмотрим последовательность мартингалов

$$\tilde{\eta}_n(t) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda n \varphi(n)}} \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\tilde{\nu}(ns).$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 6, тогда для любых $0 \leq v < t \leq 1$, $\delta > 0$ найдется $N(\delta, t - v) : \forall n > N(\delta, t - v)$

$$\mathbf{P}(\sup_{r \in [v, t]} |\tilde{\eta}_n(r) - \tilde{\eta}_n(v)| \geq \delta) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n) \delta^2}{4(t - v)} \right\}.$$

Доказательство. Лемма 7 является следствием леммы 1. $\square$

Лемма 8. Последовательность случайных процессов $\{\tilde{\eta}_n\}$ C -экспоненциально плотна, т.е. для любых $\delta > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{\eta}_n(s) - \tilde{\eta}_n(s-)| \geq \delta) = -\infty.$$

Доказательство. Очевидным образом следует из определения C -экспоненциальной полноты, так как $|\cos(\alpha \nu(nt) + \beta)| \leq 1$ п.н. $\square$

Лемма 9. Если $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ или $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$, то найдется неслучайная константа $c > 0$ такая, что для всех t

$$\left| \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\nu(ns) \right| < c.$$

Доказательство. Рассмотрим случай когда $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\nu(ns) = \cos(\beta) \mathbf{I}(\nu(nt) = 1) + \\ & + (\cos(\beta) + \cos(\alpha + \beta)) \mathbf{I}(\nu(nt) = 2) + \dots + \left(\sum_{k=0}^j \cos(\alpha k + \beta) \right) \mathbf{I}(\nu(nt) = j+1) + \dots \end{aligned}$$

Так как при каждом t только один из указанных выше индикаторов отличен от нуля, то нам достаточно доказать, что существует $c > 0$ такая, что для всех натуральных j

$$\left| \sum_{k=0}^j \cos(\alpha k + \beta) \right| < c.$$

Умножая и деля эту сумму на $\sin(\alpha/2)$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j \cos(\alpha k + \beta) &= \frac{1}{2 \sin(\alpha/2)} \sum_{k=0}^j \left(\sin(\alpha k + \beta + \alpha/2) - \sin(\alpha k + \beta - \alpha/2) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin(\alpha/2)} \left(\sin(\alpha j + \beta + \alpha/2) - \sin(\beta - \alpha/2) \right). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\left| \sum_{k=0}^j \cos(\alpha k + \beta) \right| < \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\nu(ns) \right| \leq \left| \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \right|.$$

Если $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$, то

$$\left| \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\nu(ns) \right| = \left| \cos \beta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I(\nu(nt) > k) \right| \leq |\cos \beta|. \square$$

Лемма 10. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$, тогда

1) если $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\cos^2(\alpha \nu(ns) + \beta) - 1/2) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty, \quad (47)$$

2) если $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\cos^2(\alpha \nu(ns) + \beta) - \cos^2 \beta) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай когда $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

$$\int_0^t (\cos^2(\alpha \nu(ns) + \beta) - 1/2) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2\alpha \nu(ns) + 2\beta) ds. \quad (48)$$

Если $\alpha \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ и $\beta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, то равенство (47) верно так как выражение (48) равно нулю.

Если $\alpha \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ или $\beta \notin \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, то используя лемму 9 и условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\varphi(n)}}{n^{1/4}} = 0$ при достаточно больших n будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2\alpha \nu(ns) + 2\beta) ds \right| > \varepsilon \right) \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{2\lambda n} \int_0^t \cos(2\alpha \nu(ns) + 2\beta) d\tilde{\nu}(ns) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda n} \tilde{\varphi}(n)} \int_0^t \cos(2\alpha \nu(ns) + 2\beta) d\tilde{\nu}(ns) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi}(n) = n^{1/4} \sqrt{\lambda \varphi(n)}$.

Применяя лемму 7, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda n} \tilde{\varphi}(n)} \int_0^t \cos(2\alpha \nu(ns) + 2\beta) d\tilde{\nu}(ns) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \left(2 \exp \left\{ -\frac{\lambda \varphi(n) \sqrt{n} \varepsilon^2}{16} \right\} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Доказательство для случая $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$ следует из очевидного тождества $\cos^2(\pi \nu(ns) + \beta) \equiv \cos^2 \beta$. $\square$

Рассмотрим экспоненциальный мартингал

$$\gamma(t) = \exp \left\{ \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}} \int_0^t \int c(s) g(\nu(ns)) d\tilde{\nu}(ns) - \right. \\ \left. - \lambda n \int_0^t \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) c(s) g(\nu(ns))}{\sqrt{\lambda n}} \right) - \frac{\varphi(n) c(s) g(\nu(ns))}{\sqrt{\lambda n}} - 1 \right) ds \right\},$$

где $c(s)$ и $g(x)$ - неслучайные ограниченные функции.

Лемма 11. Пусть постоянная $\tilde{c}$ такая, что $|c(s)| + |g(x)| \leq \tilde{c}$.

Как и выше $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Тогда при достаточно больших n

$$\mathbf{E} \gamma^2(t) \leq \exp(2\varphi^2(n) \tilde{c}^4 t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Ито, получаем

$$\mathbf{E} \gamma^2(t) = 1 + \mathbf{E} \lambda n \int_0^t \gamma^2(s) \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) c(s) g(\nu(ns))}{\sqrt{\lambda n}} \right) - 1 \right)^2 ds.$$

Используя неравенство $\exp(x) - 1 \leq |x| \exp(x)$ и условия леммы, при достаточно больших n будем иметь

$$\lambda n \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) c(s) g(\nu(ns))}{\sqrt{\lambda n}} \right) - 1 \right)^2 \leq \varphi^2(n) \tilde{c}^4 \exp \left(\frac{\varphi(n) \tilde{c}^2}{\sqrt{\lambda n}} \right) \leq 2\varphi^2(n) \tilde{c}^4.$$

Значит,

$$\mathbf{E} \gamma^2(t) \leq 1 + 2\varphi^2(n) \tilde{c}^4 \mathbf{E} \int_0^t \gamma^2(s) ds.$$

Применив неравенство Гронуолла-Белмана (см. гл.2 §11 [27]), получим

$$\mathbf{E} \gamma^2(t) \leq \exp(2\varphi^2(n) \tilde{c}^4 t). \square$$

Лемма 12. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$, тогда семейство мер

$$\mathbf{P}_{n,m}(A) = \mathbf{P}((\tilde{\eta}_n(t_1), \dots, \tilde{\eta}_n(t_m)) \in A),$$

$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $\mathbb{R}^m$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

1) если $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$$S_3(x) = \frac{x_1^2}{t_1} + \sum_{k=2}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}, \quad x = (x_1, \dots, x_m),$$

2) если $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$

$$S_4(x) = \frac{1}{2 \cos^2 \beta} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \sum_{k=2}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}} \right), \quad x = (x_1, \dots, x_m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай когда $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Доказательство проведем используя теорему Гертнера-Эллиса (см. с.44 [49]). Чтобы применить эту теорему нам надо найти для $a \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\}.$$

Оценим сверху и снизу $\mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\} = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{a_k \varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}} \int_0^{t_k} \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\tilde{\nu}(ns) \right\} = \\ &= \mathbf{E} \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l \right) \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\tilde{\nu}(ns) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $b_k = \sum_{l=k}^m a_l$, $f_{n,m}(t) = \cos(\alpha \nu(nt) + \beta) \sum_{k=1}^m b_k I(t \in [t_{k-1}, t_k))$, через $M(0, t)$ обозначим последовательность экспоненциальных мартингалов

$$\exp \left\{ \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\lambda n}} \int_0^t f_{n,m}(s) d\tilde{\nu}(ns) - \lambda n \int_0^t \left(\exp \left(\frac{\varphi(n) f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right) - \frac{\varphi(n) f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} - 1 \right) ds \right\}.$$

Используя новые обозначения, $\mathbf{E}_1$ можно записать следующим образом

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}M(0, t_m) \exp \left\{ \lambda n \int_0^{t_m} \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right) - \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} - 1 \right) ds \right\}.$$

Применяя неравенство

$$\frac{x^2}{2} \exp |x| \geq \exp(x) - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} \exp(-|x|),$$

получаем следующие оценки сверху и снизу

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp \left\{ - \left| \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right| \right\} ds \leq \\ & \leq \lambda n \int_0^{t_m} \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right) - \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} - 1 \right) ds \leq \\ & \leq \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp \left\{ \left| \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right| \right\} ds. \end{aligned}$$

Из условия леммы следует, что для любого $c > 0 \exists N(c) : \forall n > N(c)$ выполнено неравенство $\left| \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right| < c$. Поэтому для $n > N(c)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp(-c) ds & \leq \lambda n \int_0^{t_m} \left(\exp \left(\frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} \right) - \frac{\varphi(n)f_{n,m}(s)}{\sqrt{\lambda n}} - 1 \right) ds \leq \\ & \leq \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp(c) ds. \end{aligned} \tag{49}$$

Обозначим

$$B_n^\varepsilon = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\cos^2(\alpha \nu(ns) + \beta) - 1/2) ds \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Оценим сверху $\mathbf{E}_1$. Применяя (49), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &\leq \mathbf{E}M(0, t_m) \exp \left\{ \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp(c) ds \right\} = \\ &= \mathbf{E}M(0, t_m) \exp \left\{ \int_0^{t_m} \varphi^2(n) \frac{f_{n,m}^2(s)}{2} \exp(c) ds \right\} (\mathbf{I}(B_n^\varepsilon) + \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon})).\end{aligned}$$

Используя равенство $\mathbf{E}M(0, t_m) = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &\leq \mathbf{E}M(0, t_m) \exp \left\{ \exp(c) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\varphi^2(n)}{4} (t_k - t_{k-1}) b_k^2 + \varepsilon b_k^2 \varphi^2(n) \right) \right\} \mathbf{I}(B_n^\varepsilon) + \\ &\quad + \mathbf{E}M(0, t_m) \exp \left\{ \exp(c) \sum_{k=1}^m b_k^2 \varphi^2(n) (t_k - t_{k-1}) \right\} \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq \\ &\leq \exp \left\{ \exp(c) m \varepsilon b^2 \varphi^2(n) + \exp(c) \frac{\varphi^2(n)}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 \right\} + \\ &\quad + \exp \left\{ \exp(c) \varphi^2(n) b^2 \right\} \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}),\end{aligned}$$

где $b = \max_k |b_k|$.

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq (\mathbf{E}M^2(0, t_m) \mathbf{P}(\overline{B_n^\varepsilon}))^{1/2}.$$

Из леммы 10 следует, что при достаточно больших n

$$\mathbf{P}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq \exp(-6 \exp(c) \varphi^2(n) (\max(b, 1))^4). \quad (50)$$

Применим лемму 11

$$\mathbf{E}M^2(0, t_m) \leq \exp(2\varphi^2(n) (\max(b, 1))^4). \quad (51)$$

Используя оценки (50), (51), получаем что при достаточно больших n

$$\exp \left\{ \exp(c) \varphi^2(n) b^2 \right\} \mathbf{E}M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \leq \exp(-\varphi^2(n) (\max(b, 1))^4).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_1 \leq 2 \exp \left\{ \exp(c) m \varepsilon b^2 \varphi^2(n) + \exp(c) \frac{\varphi^2(n)}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 \right\}. \quad (52)$$

Оценим снизу $\mathbf{E}_1$. Используя неравенство (49), при достаточно больших n получим

$$\mathbf{E}_1 \geq \mathbf{E} M(0, t_m) \exp \left\{ -\exp(-c) m \varepsilon b^2 \varphi^2(n) + \exp(-c) \frac{\varphi^2(n)}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 \right\} \mathbf{I}(B_n^\varepsilon).$$

Оценим снизу $\mathbf{E} M(0, t_m) \mathbf{I}(B_n^\varepsilon)$.

Используя неравенства (50), (51) и тот факт, что $\mathbf{E} M(0, t_m) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M(0, t_m) \mathbf{I}(B_n^\varepsilon) &= \mathbf{E} M(0, t_m) - \mathbf{E} M(0, t_m) \mathbf{I}(\overline{B_n^\varepsilon}) \geq \\ &\geq 1 - \exp(-2\varphi^2(n)(\max(b, 1))^4). \end{aligned} \quad (53)$$

Согласно (53) при достаточно больших n будем иметь

$$\mathbf{E}_1 \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -\exp(-c) m \varepsilon b^2 \varphi^2(n) + \exp(-c) \frac{\varphi^2(n)}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 \right\}. \quad (54)$$

Используя неравенства (52), (54), получаем

$$\begin{aligned} &\exp(-c) \left(\frac{1}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 - m \varepsilon b^2 \right) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\} \leq \\ &\leq \exp(c) \left(\frac{1}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2 + m \varepsilon b^2 \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Так как неравенство (55) верно для любых $\varepsilon > 0$, $c > 0$, то сделав предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ \varphi^2(n) \sum_{k=1}^m a_k \tilde{\eta}_n(t_k) \right\} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) b_k^2.$$

Найдем для функции $\Lambda(a) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l \right)^2 (t_k - t_{k-1})$ преобразование Лежандра.

$$\Lambda^*(x) = \sup_{a \in R^m} \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l \right)^2 (t_k - t_{k-1}) \right).$$

Обозначим

$$F(a) = \sum_{k=1}^m a_k x_k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=k}^m a_l \right)^2 (t_k - t_{k-1}).$$

Элементарными вычислениями находим супремум функции $F(a)$:

$$\Lambda^*(x) = \frac{x_1^2}{t_1} + \sum_{k=2}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}.$$

Случай $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 7. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, $\alpha, \beta \in (0, 2\pi]$.

Справедливы следующие утверждения.

1) Если $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, то семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_n(\cdot) \in A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$\tilde{S}_1(x) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2) Если $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$, то семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\tilde{\eta}_n(\cdot) \in A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$\tilde{S}_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cos^2(\beta)} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Из леммы 7 следует, что последовательность случайных процессов $\{\tilde{\eta}_n(\cdot)\}$ экспоненциально плотна. В лемме 8 было доказано, что эта последовательность C –экспоненциально плотна. Поэтому из 4.14 и 4.30 [54] и леммы 12 следует, что

$$\tilde{S}_1(x) = \sup_{\{t_k \in T_0\}} S_3((x(t_1), \dots, x(t_m))) = \sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x_1^2}{t_1} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right),$$

где всюду плотное множество $T_0 \subseteq [0, 1]$.

Из теоремы 7 ([38] с.238) следует, что для $x(\cdot) \in \mathbb{A}\mathbb{C}_0[0, 1]$ у которых производная принадлежит пространству $\mathbf{L}_2[0, 1]$

$$\sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1) - 0}{t_1 - 0} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right) = \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt,$$

а для остальных функций

$$\sup_{\{t_k \in T_0\}} \left(\frac{x^2(t_1) - 0}{t_1 - 0} + \sum_{k=2}^m \frac{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}} \right) = \infty.$$

Аналогично рассматривается случай $\alpha = \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \frac{3\pi}{2}$. $\square$

Докажем теперь теорему 6.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 9 получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(\rho(\eta_n, \tilde{\eta}_n) > \varepsilon) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda n} \varphi(n)} \int_0^t \cos(\alpha \nu(ns) + \beta) d\nu(ns) \right| > \varepsilon \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Значит, по теореме 4.2.13 [49] последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет на пространстве $(\mathbb{D}[0, 1], \rho)$ такому же принципу больших уклонений как и последовательность $\{\tilde{\eta}_n\}$. Так как процесс $\eta_n(t)$ непрерывен с вероятностью 1, то из леммы 6 следует, что он удовлетворяет этому же принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$. $\square$

ГЛАВА 3.

Принцип умеренно больших уклонений для решений одномерных уравнений Ито

§1. Формулировка основных результатов.

Эта глава посвящена вопросу об умеренно больших уклонениях для заданной на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ последовательности решений стохастических уравнений

$$\eta_n(t) = x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s))ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(n\eta_n(s))dw(s), \quad (56)$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, $b(x)$ и $\sigma(x)$ – неслучайные функции, удовлетворяющие условиям $\exists \lambda \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda} \leq \sigma^2(x) \leq \lambda, \quad |b(x)| \leq \lambda, \quad (57)$$

$n \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, $\varphi(n)$ положительная монотонно возрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$.

Заметим, что если выполнено условие (57), то из работы [60] следует, что у уравнения (56) существует единственное слабое решение.

Известны результаты об умеренно больших уклонениях для случая, когда коэффициенты $b(x)$ и $\sigma(x)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми периодическими функциями [56] или выполнено условие (M) работы [36]. Мы не будем требовать от функций $b(x)$ и $\sigma(x)$ ни гладкости, ни периодичности и покажем, что при предположении (57) для обоснования принципа больших уклонений достаточно существования у них интегральных средних. Метод доказательства отличен от метода, предложенного в [36]. Мы будем обосновывать п.у.б.у. путем доказательства сходимостей

по вероятности абсолютно непрерывной и квадратической характеристики мартингальной составляющей семимартингала (56) к некоторым неслучайным функциям. Т.е. мы будем использовать теорему аналогичную теореме 1 главы 1, полученную для диффузионных процессов. Такая теорема следует из [39], где результат сформулирован и получен в терминах теории максингалов и идемпотентных мер, и из работы [29], где она получена с помощью классической техники. При этом оказывается, что порядок роста функции $\varphi(n)$ при $n \rightarrow \infty$ будет зависеть от поведения интегралов от коэффициентов уравнения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Пусть выполнены условия

1)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2(x)} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \frac{1}{\sigma^2(x)} dx = 1/a,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} dx = B,$$

2) для любого $c > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq c} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{\left| \int_0^{un} \theta_1(s) ds \right| + \left| \int_0^{un} \theta_2(s) ds \right|} = 0,$$

где

$$\theta_1(s) = \frac{(b(s) - Ba)}{\sigma^2(s)}, \quad \theta_2(s) = 1 - \frac{a}{\sigma^2(s)}.$$

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ с

нормирующей функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_0^1 (\dot{x}(t) - Ba)^2 dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (58)$$

Результаты этой главы содержатся в работе [31].

§2. Вспомогательные результаты, доказательства.

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 13. *Рассмотрим непрерывный мартингал*

$$x(t) = \int_0^t g(s, \omega) dw(s),$$

заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$.

Пусть $g(t, \omega) - \mathfrak{F}_t$ прогрессивно измеримый случайный процесс, удовлетворяющий условию $\sup_{t \in [0,1]} g^2(t, \omega) \leq \lambda$ п.н. Тогда для любого $c > 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \geq c) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{c^2}{2\lambda} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из теоремы 5 ([26] с.172).

Лемма 14. *Пусть случайный процесс $x(t)$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, имеет вид*

$$x(t) = \int_0^t g(\omega, y(s)) dw(s),$$

где случайные процессы $g(\omega, y(t))$ и $y(t)$ являются $\mathfrak{F}_t$ прогрессивно измеримыми, $\mathbf{E} \int_0^1 g^2(\omega, y(s)) ds < \infty$. Для произвольной положительной константы d обозначим $U_d = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |y(t)| \leq d\}$. Пусть $\sup_{|y| \leq d} g^2(y, \omega) \leq \lambda$ почти наверное. Тогда для любого $c > 0$

$$\mathbf{P}(\{\sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \geq c\} \cap U_d) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{c^2}{2\lambda} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\mathbf{P}(\{\sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \geq c\} \cap U_d) = \mathbf{P}\left(\mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t g(y(s), \omega) dw(s) \right| \geq c\right).$$

Так как для любого $s \in [0, 1]$ $U_d \subseteq \{\omega : \sup_{t \in [0, s]} |y(t)| \leq d\}$, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) dw(s) \right| \leq \\ & \leq \mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| \leq d) dw(s) \right| + \\ & + \mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| > d) dw(s) \right| = \\ & = \mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| \leq d) dw(s) \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, почти наверное

$$\mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) dw(s) \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| \leq d) dw(s) \right|.$$

Поэтому, применяя лемму 13 получаем,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| \geq c\} \cap U_d) \leq \\ & \leq \mathbf{P}\left(\mathbf{I}(U_d) \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| \leq d) dw(s) \right| \geq c\right) \leq \\ & \leq \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t g(y(s, \omega), \omega) \mathbf{I}(\sup_{v \in [0, s]} |y(v)| \leq d) dw(s) \right| \geq c\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{c^2}{2\lambda}\right\}. \square \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится один результат из работы [29]. Сформулируем его. Рассмотрим, заданную на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ последовательность непрерывных семимартингалов $X_\varepsilon(t)$, $t \in [0, 1]$:

$$X_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t b_\varepsilon(s) ds + \varepsilon^k \int_0^t \alpha_\varepsilon(s) dw(s),$$

где $b_\varepsilon(t)$ и $\alpha_\varepsilon(t)$ это $\mathfrak{F}_t$ -согласованные случайные процессы с $\int_0^t |b_\varepsilon(s)| ds < \infty$ и $\int_0^t \alpha_\varepsilon^2(s) ds < \infty$ п.н., ε – малый параметр, k – положительное число.

Лемма 15. (теорема A.1 [29]) Пусть $0 < c_1 \leq \alpha_\varepsilon^2(s) \leq c_2$, $|b_\varepsilon(s)| \leq c_3$ и существуют константы $\mathbf{a} > 0$ и $\mathbf{b}$ такие, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2k} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (b_\varepsilon(s) - \mathbf{b}) ds \right| > \delta \right) = -\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2k} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\alpha_\varepsilon^2(s) - \mathbf{a}) ds \right| > \delta \right) = -\infty.$$

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_\varepsilon(A) = \mathbf{P}(X_\varepsilon(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ с нормирующей функцией $1/\varepsilon^{2k}$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^1 (\dot{x}(t) - \mathbf{b})^2 dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что результат леммы 15 также может быть получен из следствия 4.3.8 ([39] с.349) Там сформулирован более общий результат в терминах теории идемпотентных мер и максингалов.

Перейдем к доказательству теоремы 8.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим φ^{-1} функцию обратную к монотонной функции φ . Если положить $\varepsilon_n = (1/\varphi(n))^{1/k}$, случайные процессы $b_{\varepsilon_n}(s) = b(\varphi^{-1}(1/\varepsilon_n^k)\eta_n(s))$, $\alpha_{\varepsilon_n}(s) = \sigma(\varphi^{-1}(1/\varepsilon_n^k)\eta_n(s))$, то из леммы 14 будет следовать, что нам достаточно проверить следующие условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (b(n\eta_n(s)) - aB) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty, \quad (59)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\sigma^2(n\eta_n(s)) - a) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty. \quad (60)$$

Покажем, что выполнено условие (59). Обозначим

$$H_1(x) = \int_0^x \int_0^r \theta_1(s) ds dr.$$

Применив формулу Ито к функции $H_1(n\eta_n(t))$, получим

$$\begin{aligned} H_1(n\eta_n(t)) &= H_1(nx_0) + n \int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r) dr \right) b(n\eta_n(s)) ds + \\ &+ \frac{n^2}{2\varphi^2(n)} \int_0^t (b(n\eta_n(s)) - aB) ds + \\ &+ \frac{n}{\varphi(n)} \int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r) dr \right) \sigma(n\eta_n(s)) dw(s). \end{aligned} \quad (61)$$

Из (61) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^t (b(n\eta_n(s)) - aB) ds &= \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(n\eta_n(t)) - \\ &- \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(nx_0) - Y_n^1(t) - Y_n^2(t), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} Y_n^1(t) &= \frac{2\varphi^2(n)}{n} \int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r) dr \right) b(n\eta_n(s)) ds, \\ Y_n^2(t) &= \frac{2\varphi(n)}{n} \int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r) dr \right) \sigma(n\eta_n(s)) dw(s). \end{aligned}$$

Оценим слагаемые. Имеем,

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(n\eta_n(t)) \right| &= \frac{2\varphi^2(n)}{n} \left| \int_0^{\eta_n(t)} \int_0^{nu} \theta_1(s) ds du \right| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)| \frac{2\varphi^2(n)}{n} \sup_{|u| \leq \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)|} \left| \int_0^{nu} \theta_1(s) ds \right|. \end{aligned} \quad (63)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(nx_0) \right| &= \frac{2\varphi^2(n)}{n} \left| \int_0^{x_0} \int_0^{nu} \theta_1(s) ds du \right| \leq \\ &\leq \sup_{|u| \leq |x_0|} \frac{2\varphi^2(n)|x_0|}{n} \left| \int_0^{nu} \theta_1(s) ds \right|. \end{aligned} \quad (64)$$

Используя условия (57), получаем

$$\begin{aligned} |Y_n^1(t)| &= \left| \frac{2\varphi^2(n)}{n} \int_0^t \left(\int_0^{n\eta_n(s)} \theta_1(r) dr \right) b(n\eta_n(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{2\varphi^2(n)\lambda}{n} \sup_{|u| \leq \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)|} \left| \int_0^{nu} \theta_1(s) ds \right|. \end{aligned} \quad (65)$$

Для $c > |x_0| + \lambda$ обозначим

$$B_c = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |\eta_n(t)| > c\}.$$

Применив лемму 13, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_c) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| x_0 + \int_0^t b(n\eta_n(s)) ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(n\eta_n(s)) dw(s) \right| > c \right) \leq \\ &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(n\eta_n(s)) dw(s) \right| > c - |x_0| - \lambda \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda} \right\}. \quad (66)$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$D_\delta = \{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |Y_n^2(t)| > \delta\} \cap \overline{B}_c,$$

$$J_{n,c} = \sup_{|u| \leq c} \left| \int_0^{nu} \theta(r) dr \right|.$$

Используя лемму 14, получаем

$$\mathbf{P}(D_\delta) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{n^2 \delta^2}{8\varphi^2(n)\lambda J_{n,c}^2} \right\}.$$

Из условия 2 теоремы 8 следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^4(n)}{n^2} J_{n,c}^2 = 0$, поэтому для любого $\delta > 0$ существует $n(\delta, c, \lambda) : \forall n > n(\delta, c, \lambda)$

$$-\frac{n^2 \delta^2}{8\varphi^2(n)\lambda J_{n,c}^2} = -\frac{\varphi^2(n)\delta^2}{8\lambda \frac{\varphi^4(n)}{n^2} J_{n,c}^2} < -\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}. \quad (67)$$

Обозначим

$$K_1^\delta = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(n\eta_n(t)) \right| > \delta \right\}, \quad K_2^\delta = \left\{ \omega : \left| \frac{2\varphi^2(n)}{n^2} H_1(nx_0) \right| > \delta \right\},$$

$$K_3^\delta = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} |Y_n^1(t)| > \delta \right\}, \quad A_\varepsilon = \left\{ \omega : \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (b(n\eta_n(s)) - Ba) ds \right| > \varepsilon \right\}.$$

Используя (62) и оценки (63)-(67), учитывая условие 2 теоремы 8, при достаточно больших n будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_\varepsilon) &\leq \mathbf{P}(A_\varepsilon \cap \overline{B}_c) + \mathbf{P}(B_c) \leq \\ &\leq \mathbf{P}((K_1^{\varepsilon/4} \cup K_2^{\varepsilon/4} \cup K_3^{\varepsilon/4} \cup D_{\varepsilon/4}) \cap \overline{B}_c) + \mathbf{P}(B_c) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\frac{2c\varphi^2(n)}{n} \sup_{|u| \leq c} \left| \int_0^{nu} \theta(s) ds \right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{2\varphi^2(n)|x_0|}{n} \sup_{|u| \leq |x_0|} \left| \int_0^{nu} \theta(s) ds \right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{P} \left(\frac{2\varphi^2(n)\lambda}{n} \sup_{|u| \leq c} \left| \int_0^{nu} \theta_1(s) ds \right| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right) + 2 \exp \left\{ -\frac{n^2 \varepsilon^2}{128 \varphi^2(n) \lambda J_{n,c}^2} \right\} + \\
& + 2 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda} \right\} \leq 4 \exp \left\{ -\frac{\varphi^2(n)(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda} \right\}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Используя (68), для любого $c > |x_0| + \lambda$, будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}(A_\varepsilon) \leq -\frac{(c - |x_0| - \lambda)^2}{2\lambda}.$$

Перейдя к пределу при $c \rightarrow +\infty$, получим (59).

Если рассмотреть функцию

$$H_2(x) = \int_0^x \int_0^r \theta_2(s) ds dr$$

и применить формулу Ито к процессу $H_2(n\eta_n(t))$, то проделав рассуждения полностью аналогичные вышеизложенным, получим (60). $\square$

Заметим, что если функции $b(x)$, $\sigma(x)$ ограниченные и периодические с периодом T , то $\int_0^{nT} \theta_i(s) ds = 0$, $i = 1, 2$. Откуда следует, что найдется такая константа $l > 0$, что для всех $u \in R$ $\left| \int_0^{un} \theta_i(s) ds \right| \leq l$. Поэтому условие 2 теоремы будет выполнено, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, то есть будет таким же как в работе [56].

В следующем параграфе будет приведен ряд модельных примеров применения теоремы 8. Для некоторых из них нам понадобится еще один вспомогательный результат.

Рассмотрим последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$, определяемую решениями стохастических уравнений

$$\xi_n(t) = x_0 + \int_0^t b(|n\xi_n(s)|^\gamma) ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(|n\xi_n(s)|^\gamma) dw(s), \quad (69)$$

где функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ периодические с периодом 1. Будем считать выполненным условие (57). Обозначим

$$\int_0^1 \frac{1}{\sigma^2(x)} dx = 1/a, \quad \int_0^1 \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} dx = B.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 16. Пусть выполнены условия

$$\gamma > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\min(\gamma/2, 1/2)}} = 0.$$

Тогда семейство мер, порожденное решениями (69) на пространстве $(\mathbb{C}[0, 1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с нормирующей функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_0^1 (\dot{x}(t) - Ba)^2 dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_{x_0}[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Будем использовать доказанную выше теорему. Покажем, что выполнено условие 1 теоремы 8. Так как $\sigma(|x|^\gamma)$ и $b(|x|^\gamma)$ функции четные и ограниченные, то достаточно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)} dx = 1/a, \quad (70)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \frac{b(x^\gamma)}{\sigma^2(x^\gamma)} dx = B. \quad (71)$$

Докажем (70). Используя замену переменной $y = x^\gamma$, будем иметь

$$\int_1^T \frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)} dx = \frac{1}{\gamma} \int_1^{T^\gamma} \frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)} dy.$$

Обозначим

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^2(x)} dx.$$

Так как функция $\frac{1}{\sigma^2(x)}$ периодическая с периодом 1, то

$$F(y) - \frac{1}{a}y = \int_0^y \left(\frac{1}{\sigma^2(x)} - \frac{1}{a} \right) dx = \int_0^{\{y\}} \frac{1}{\sigma^2(x)} dx - \frac{1}{a}\{y\}.$$

Применяя условия наложенные на $\sigma(x)$ и неравенство $1/a \leq \lambda$, получим оценку

$$\frac{1}{a}y - \lambda\{y\} \leq F(y) \leq \frac{1}{a}y + \lambda\{y\}. \quad (72)$$

Используя формулу интегрирования по частям, для $T \geq 1$ будем иметь

$$\frac{1}{\gamma} \int_1^{T^\gamma} \frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)} dy = \frac{T^{1-\gamma}}{\gamma} F(T^\gamma) - \frac{1}{a\gamma} - \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \int_1^{T^\gamma} y^{1/\gamma-2} F(y) dy,$$

откуда, применяя оценку (72) и неравенство $1/a \leq \lambda$, получаем для $T \geq 1$

$$\frac{T}{a} - \frac{2\lambda}{\gamma}(T^{1-\gamma} + 1) \leq \frac{1}{\gamma} \int_1^{T^\gamma} \frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)} dy \leq \frac{T}{a} + \frac{2\lambda}{\gamma}(T^{1-\gamma} + 1). \quad (73)$$

Из оценки (73) следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \frac{1}{\sigma^2(x^\gamma)} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\gamma} \int_1^{T^\gamma} \frac{y^{1/\gamma-1}}{\sigma^2(y)} dy = 1/a.$$

Формула (70) доказана. Полностью аналогично доказывается (71).

Покажем, что выполнено условие 2 теоремы 8. Используя оценку (73) и предположение о функции $\sigma^2(x)$, получаем для $|un| \in [0, 1]$

$$-1 - a\lambda \leq \int_0^{|un|} \left(1 - \frac{a}{\sigma^2(x^\gamma)} \right) dx \leq 1 + a\lambda, \quad (74)$$

для $|un| \geq 1$

$$\begin{aligned} -1 - a\lambda - \frac{2\lambda a}{\gamma} - \frac{2a|un|^{1-\gamma}\lambda}{\gamma} &\leq \int_0^{|un|} \left(1 - \frac{a}{\sigma^2(x^\gamma)}\right) dx \leq \\ &\leq 1 + a\lambda + \frac{2\lambda a}{\gamma} + \frac{2a|un|^{1-\gamma}\lambda}{\gamma}. \end{aligned} \quad (75)$$

Так как функция $\sigma(|x|^\gamma)$ четная, $a \leq \lambda$, то из (74), (75) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{un} \theta_2(x) dx \right| &= \left| \int_0^{|un|} \left(1 - \frac{a}{\sigma^2(|x|^\gamma)}\right) dx \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{\lambda^2(2+\gamma)}{\gamma} + \frac{2\lambda^2|un|^{1-\gamma}}{\gamma} I(|un| \geq 1). \end{aligned} \quad (76)$$

Прodelав рассуждения полностью аналогичные вышеизложенным, получим аналогичную оценку для $\int_0^{un} \frac{(b(|x|^\gamma) - Ba)}{\sigma^2(|x|^\gamma)} dx$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{un} \frac{(b(|x|^\gamma) - Ba)}{\sigma^2(|x|^\gamma)} dx \right| &\leq \\ &\frac{\lambda^4(2\gamma+5)}{\gamma} + \frac{6\lambda^4|un|^{1-\gamma}}{\gamma} I(|un| \geq 1). \end{aligned} \quad (77)$$

Из (76), (77) и условий леммы имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq c} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{\left| \int_0^{un} \theta_1(s) ds \right| + \left| \int_0^{un} \theta_2(s) ds \right|} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq c} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda^4(4\gamma+7)}{\gamma} + \frac{8\lambda^4|un|^{1-\gamma} I(|un| \geq 1)}{\gamma}} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda^4(4\gamma+15)}{\gamma}} I(\gamma \geq 1) + \frac{\varphi(n)}{n^{\gamma/2}} \sqrt{\frac{9\lambda^4 c^{1-\gamma}}{\gamma}} I(0 < \gamma < 1) \right) = 0. \square \end{aligned}$$

§3. Примеры.

Применим теорему 8 для получения п.у.б.у. для различных диффузионных процессов.

1.

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sqrt{2 + \frac{1}{1 + (n\eta_n(s))^2}} dw(s),$$

в этом случае $a = 2$,

$$\theta_2(s) = \frac{1}{2s^2 + 3}, \quad \left| \int_0^{un} \theta_2(s) ds \right| \leq \frac{\pi}{4\sqrt{6}},$$

условие 2 теоремы 8 будет выполнено, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Функционал действия имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что так как последовательность функций $\sqrt{2 + \frac{1}{1+(nx)^2}}$ не сходится равномерно на компактах, то результат примера 1 не следует из теоремы 3.2.1 и замечания 2 ([17] с.74).

2. Почти периодический коэффициент диффузии.

$$\eta_n(t) = \int_0^t (1 + \cos(n\eta_n(s))) ds + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3 + \sin(n\eta_n(s)) + \sin(\pi n\eta_n(s))}} dw(s),$$

в этом случае $a = 1/3$, $B = 3$,

$$\theta_1(s) = 3 \cos(s) + \cos(s) \sin(s) + \cos(s) \sin(\pi s), \quad \theta_2(s) = -\frac{1}{3}(\sin(s) + \sin(\pi s)).$$

$$\sup_{u \in R} \left| \int_0^{un} \theta_1(s) ds \right| \leq 5, \quad \sup_{u \in R} \left| \int_0^{un} \theta_2(s) ds \right| \leq \frac{8}{9},$$

условие 2 теоремы 8 выполнено если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \int_0^1 (\dot{x}(t) - 1)^2 dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3.

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \frac{1}{2 + \cos(2\pi \sqrt{|n\xi_n(s)|})} dw(s),$$

в этом случае $a = 2/9$, $\gamma = 1/2$.

Из леммы 16 следует, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt[4]{n}} = 0$, то функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{9}{4} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4. Разрывный коэффициент диффузии.

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t (1 + \{n^2 \xi_n^2(s)\}) dw(s),$$

в этом случае $a = 2$, $\gamma = 2$, $\min(\gamma/2, 1/2) = 1/2$.

Из леммы 16 следует, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$, то функционал действия равен

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом в третьей главе мы получили связь между интегральными средними коэффициентов уравнения Ито и видом функционала действия в п.у.б.у.

ГЛАВА 4.

Функциональный закон повторного логарифма для стохастических интегралов Ито

§1. Формулировка основных результатов.

В этой главе мы докажем функциональный закон повторного логарифма для последовательности, заданных на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, случайных процессов

$$\theta_n(t) = \frac{\int_0^{nt} f_n(\omega, s) dw(s)}{\varphi(n)\sqrt{n}}, \quad (78)$$

где $w(t)$ это $\mathfrak{F}_t$ – согласованный винеровский процесс, такой, что приращения $w(u) - w(t)$ не зависят от $\mathfrak{F}_t$ при $u > t$; случайные процессы $f_n(\omega, t)$ являются $\mathfrak{F}_t$ – прогрессивно измеримыми.

Будем предполагать, что существует неслучайная постоянная $\lambda \geq 1$ такая, что почти наверное

$$\frac{1}{\lambda} \leq f_n^2(\omega, t) \leq \lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В работе [10] Булинский доказал функциональный закон повторного логарифма для процесса (78) при $f_n(\omega, t) \equiv 1$ в равномерной метрике с нормирующей функцией $\varphi(n)$ более общей, чем классическая $\sqrt{2 \ln \ln n}$. Обобщение результата Булинского на случай решений стохастических уравнений с периодическими коэффициентами, возмущенных скачкообразным случайным процессом, проведено в работе [65]. В этой главе мы получим функциональный закон повторного логарифма для процессов (78) при

иных предположениях, чем в [65], и другим методом. Отметим, что подинтегральная функция является случайной и не будет требоваться существования ее поточечного предела при $n \rightarrow \infty$.

Мы покажем связь между видом функционала действия в п.б.у. и видом предельного множества в законе повторного логарифма.

Обозначим Φ – класс неубывающих функций $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty.$$

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi, r, c) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{-r\varphi^2(n_k)}{2} \right\}, \quad n_k = [c^k], \quad c > 1.$$

Для φ определим

$$R^2(\varphi) = \inf \{ r > 0 : I(\varphi, r, c) < \infty \}. \quad (79)$$

$R^2(\varphi) = \infty$, если не существует такого конечного r , что $I(\varphi, r, c) < \infty$.

Заметим, что для $\varphi(n) = \sqrt{2 \ln \ln(n)}$ (случай, который рассмотрел Strassen V. в ставшей уже классической работе [73]) $R^2(\varphi) = 1$.

Обозначим $K_r(a)$ замыкание по норме $\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ множества таких функций $x(t) \in \mathbb{AC}_0[0, 1]$, что $\int_0^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a} dt \leq r^2$, где константа $a > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. Пусть $\varphi(n) \in \Phi$ и выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f_n^2(\omega, ns) - a) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty.$$

Тогда множество предельных точек последовательности случайных процессов $\theta_n(t)$ с вероятностью единица совпадает с $K_R(a)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (79).

Эта теорема будет доказана в следующем параграфе после доказательства вспомогательных лемм.

Результаты этой главы содержатся в работах [33], [63].

§2. Вспомогательные результаты, доказательства.

Для доказательства теоремы 9 нам понадобится принцип больших уклонений для последовательности мер, порожденных процессами $\theta_n(t)$.

Лемма 17. Пусть существует неслучайная постоянная $a > 0$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f_n^2(\omega, ns) - a) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty. \quad (80)$$

Тогда семейство мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}\{\theta_n(\cdot) \in A\}$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ с функцией $\psi(n) = \varphi^2(n)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{AC}_0[0,1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из [29] теорема A.1 или из следствия 4.3.8 ([39] с.349). $\square$

Рассмотрим случайный процесс

$$\eta(t) = \int_0^t g(\omega, s) dw(s),$$

где случайный процесс $g(\omega, s)$ - $\mathfrak{F}_s$ -прогрессивно измерим и существует $\lambda \geq 1$ такое, что $\frac{1}{\lambda} \leq g^2(\omega, s) \leq \lambda$ п. н.

Лемма 18. Пусть событие $A \in \mathfrak{F}_s$, $s \geq 0$ такое, что $\mathbf{P}(A) > 0$. Определим меру $\tilde{\mathbf{P}}(B) = \mathbf{P}(B|A)$, $B \in \mathfrak{F}$. Тогда на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \tilde{\mathbf{P}})$ случайный процесс $\eta(t) - \eta(s)$, $t \geq s$, будет непрерывным с вероятностью 1 квадратично интегрируемым мартингалом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность с вероятностью 1 и ограниченность второго момента очевидны, поэтому покажем, что $\eta(t) - \eta(s)$

будет мартингалом. Обозначим $\xi(\omega) = \tilde{\mathbf{E}}(\eta(t) - \eta(s) | \mathfrak{F}_u)$, $s \leq u \leq t$. Для любого множества $C \in \mathfrak{F}_u$, в силу того, что $\eta(t) - \eta(s)$ является мартингалом на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} \int_C \xi(\omega) \tilde{\mathbf{P}}(d\omega) &= \int_C (\eta(t) - \eta(s)) \tilde{\mathbf{P}}(d\omega) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{A \cap C} (\eta(t) - \eta(s)) \mathbf{P}(d\omega) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{A \cap C} (\eta(u) - \eta(s)) \mathbf{P}(d\omega) = \int_C (\eta(u) - \eta(s)) \tilde{\mathbf{P}}(d\omega). \end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{\mathbf{P}}(\omega : \{\xi(\omega) = \eta(u) - \eta(s)\}) = 1. \square$

Пусть константа $c > 1$. Для некоторого числа $d > 0$ выберем последовательность множеств $\{G_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $G_k \in \mathfrak{F}_{c^{k-1}}$ и

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(G_k) = l > 0. \quad (81)$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\mu_{c^k}(t) = \theta_{c^k}(t) - \theta_{c^k}(1/c), \quad t \in [1/c, 1],$$

определенных на стохастических базисах $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \tilde{\mathbf{P}}_k)$, где вероятностные меры $\tilde{\mathbf{P}}_k(B) = \mathbf{P}(B|G_k)$, $B \in \mathfrak{F}$.

Обозначим $Q_k(A) = \tilde{\mathbf{P}}_k(\{\omega : \mu_{c^k}(\cdot) \in A\})$, где $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}[1/c, 1], \rho)$.

Лемма 19. Пусть выполнено условие (80). Семейство вероятностных мер $Q_k(A)$ удовлетворяет принципу больших уклонений на пространстве $(\mathbb{C}[1/c, 1], \rho)$ с функцией $\psi(k) = \varphi^2(c^k)$ и функционалом действия

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \int_{1/c}^1 \dot{x}^2(t) dt, & \text{если } x(\cdot) \in \mathbb{A}\mathbb{C}_0[1/c, 1], \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 18 и условия (81) следует, что случайные процессы $\mu_{c^k}(t)$ являются непрерывными с вероятностью

1 мартингалами. Обозначим квадратическую характеристику мартингала $\mu_{c^k}(t)$ через $\langle \mu_{c^k} \rangle_t$.

Из следствия 4.3.8 [39] следует, что нам достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)} \ln \tilde{\mathbf{P}}_k \left(\sup_{t \in [1/c, 1]} |\varphi^2(c^k) \langle \mu_{c^k} \rangle_t - a(t - 1/c)| > \varepsilon \right) = -\infty.$$

Используя условие (81) получаем

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{P}}_k \left(\sup_{t \in [1/c, 1]} |\varphi^2(c^k) \langle \mu_{c^k} \rangle_t - a(t - 1/c)| > \varepsilon \right) = \\ & = \frac{\mathbf{P} \left(\left\{ \sup_{t \in [1/c, 1]} |\varphi^2(c^k) \langle \mu_{c^k} \rangle_t - a(t - 1/c)| > \varepsilon \right\} \cap G_k \right)}{\mathbf{P}(G_k)} = \\ & = \frac{\mathbf{P} \left(\left\{ \sup_{t \in [1/c, 1]} \left| \int_{1/c}^t (f_{c^k}^2(\omega, c^k s) - a) ds \right| > \varepsilon \right\} \cap G_k \right)}{\mathbf{P}(G_k)} \leq \\ & \leq \frac{\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [1/c, 1]} \left| \int_{1/c}^t (f_{c^k}^2(\omega, c^k s) - a) ds \right| > \varepsilon \right)}{l}. \end{aligned}$$

Поэтому из условия (80) и неравенства $|a| + |a + b| \geq |b|$ следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)} \ln \tilde{\mathbf{P}}_k \left(\sup_{t \in [1/c, 1]} |\varphi^2(c^k) \langle \mu_{c^k} \rangle_t - a(t - 1/c)| > \varepsilon \right) \leq \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(c^k)} \left(\ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t (f_{c^k}^2(\omega, c^k s) - a) ds \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) - \ln l \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Необходимое равенство установлено. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 9.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем доказательство на три стандартных этапа.

Этап 1.

Для $\delta > 0$ рассмотрим множество

$$J_{(R^2+\delta)/2} = \{x \in \mathbb{C}[0, 1] : S(x) < (R^2 + \delta)/2\}.$$

Очевидно, что $K_R(a) \subset J_{(R^2+\delta)/2}$.

Пусть $x \in J_{(R^2+\delta)/2} \setminus K_R(a)$, тогда существует $z \in [0, 1]$ такое, что

$$\int_0^z \frac{\dot{x}^2(t)}{a} dt = R^2.$$

Пусть

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, z], \\ x(z), & t \in (z, 1]. \end{cases}$$

Тогда $y \in K_R(a)$. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем для выбранного z

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sup_{z \leq t \leq 1} |x(t) - x(z)| \leq \sup_{z \leq t \leq 1} \left| \int_z^t \dot{x}(s) ds \right| \leq \\ &\leq (1 - z)^{1/2} \left(\lambda \int_z^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a} dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{\delta \lambda}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K_R(a) \subset J_{(R^2+\delta)/2} \subset \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta \lambda}}. \quad (82)$$

Для замкнутого множества $F = \mathbb{C}[0, 1] \setminus \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta \lambda}}$, используя лемму 17, получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}\{\theta_n(\cdot) \in F\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P}_n(F) \leq -S(F),$$

то есть при любом $\gamma > 0$ и всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}_n(F) \leq \exp\{-\varphi^2(n)(S(F) - \gamma)\}. \quad (83)$$

В силу (82) $F \subset \bar{J}_{(R^2+\delta)/2} = \mathbb{C}[0, 1] \setminus J_{(R^2+\delta)/2}$.

Поэтому

$$S(F) \geq S(\bar{J}_{(R^2+\delta)/2}) > (R^2 + \delta)/2 \quad (84)$$

Таким образом, при $\gamma = \delta/4$ из (83) и (84) имеем

$$\mathbf{P}_n(F) \leq \exp\{-\varphi^2(n)(R^2/2 + \delta/4)\}.$$

Следовательно из (79) следует, что для любого $c > 1$ и $n_k = [c^k]$, $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\theta_{n_k}(t) \notin (K_R(a))^{\sqrt{\delta\lambda}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(n_k)(R^2 + \delta/2)}{2}\right\} < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли $\theta_{n_k}(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$ для почти всех $\omega \in \Omega$ при $k > M(\omega, c, \delta)$.

Этап 2.

Рассмотрим теперь $\theta_n(t)$ для $n \in [n_k, n_{k+1}]$. Поскольку $\varphi(n)$ - неубывающая функция, то

$$\frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n_k}\varphi(n_k)} + \frac{b_{n_k}}{\sqrt{n_{k+1}}\varphi(n_{k+1})}, \quad (85)$$

где $a_{n_k}, b_{n_k} \geq 0$ и $a_{n_k} + b_{n_k} = 1$. Положим

$$\zeta_k(t) = a_{n_k}\theta_{n_k}(t) + b_{n_k}\theta_{n_{k+1}}(t).$$

Тогда для всех $k > M(\omega, c, \delta)$ получим $\zeta_k(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$. Здесь мы учли, что если $x(t), y(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$, то $a_{n_k}x(t) + b_{n_k}y(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$.

Воспользовавшись (85), получим

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \|\theta_n - \zeta_k\| > \sqrt{\delta\lambda}\right) \leq p_k^1 + p_k^2,$$

где

$$p_k^1 = \mathbf{P} \left(\sup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \frac{a_{n_k}}{\varphi(n_k) \sqrt{n_k}} \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^{nt} f_n(\omega, s) dw(s) - \int_0^{n_k t} f_{n_k}(\omega, s) dw(s) \right| > \frac{\sqrt{\delta \lambda}}{2} \right),$$

$$p_k^2 = \mathbf{P} \left(\sup_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \frac{b_{n_k}}{\varphi(n_{k+1}) \sqrt{n_{k+1}}} \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^{nt} f_n(\omega, s) dw(s) - \int_0^{n_{k+1} t} f_{n_{k+1}}(\omega, s) dw(s) \right| > \frac{\sqrt{\delta \lambda}}{2} \right).$$

Очевидно, что

$$p_k^1 \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |\theta_{n_k}(t) - \theta_{n_k}(s)| \geq \sqrt{\delta \lambda}/2 \right),$$

$$p_k^2 \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1], s \in [t/c, t]} |\theta_{n_k}(t) - \theta_{n_k}(s)| \geq \sqrt{\delta \lambda}/2 \right).$$

Оценим p_k^1 . Воспользуемся принципом больших уклонений. Обозначим

$$Q_\delta = \left\{ x \in \mathbb{AC}_0[0, 1] : \sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |x(t) - x(s)| \geq \sqrt{\delta \lambda}/2 \right\}.$$

Множество Q_δ замкнуто. Применяя неравенство Коши-Буняковского для всех $t \in [0, 1]$, $s \in [t, ct \wedge 1]$ имеем

$$\frac{\delta \lambda}{4} \leq |x(t) - x(s)|^2 \leq \left(\lambda \int_t^s \frac{\dot{x}^2(v)}{a} dv \right) (s - t) \leq 2(c - 1) \lambda S(x).$$

Значит, $S(Q_\delta) \geq \frac{\delta}{8(c-1)}$.

Тогда для $c < 1 + \frac{\delta}{4(R^2 + \delta)}$, и достаточно больших k

$$p_k^1 \leq \mathbf{P}(\theta_{n_k} \in Q_\delta) \leq \exp \left\{ \frac{-\varphi^2(n_k)(R^2 + \delta/2)}{2} \right\}. \quad (86)$$

Аналогично доказывается, что при тех же c выполняется неравенство

$$p_k^2 \leq \exp \left\{ \frac{-\varphi^2(n_k)(R^2 + \delta/2)}{2} \right\}. \quad (87)$$

Из (86), (87) и леммы Бореля-Кантелли следует, что для почти всех $\omega \in \Omega$ при $n > M(\omega, \delta)$ справедливо включение $\theta_n(t) \in \{K_R(a)\}^{\sqrt{\delta\lambda}}$.

Этап 3.

Если $R^2(\varphi) = 0$, то теорема полностью доказана.

Пусть $0 < R^2(\varphi) \leq \infty$. Покажем, что для любой функции $x(t) \in K_R(a)$ такой, что $\int_0^1 \frac{\dot{x}^2(t)}{a} dt = r^2 < R^2$ будет справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\theta_n \in \{x\}^\varepsilon \text{ бесконечно часто}) = 1. \quad (88)$$

Для последовательности $(c^k)_{k \geq 1}$, где целое число $c \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned} \{ \|\theta_{c^k} - x\|_{[0,1]} < \varepsilon \} &\supseteq \{ \|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|x\|_{[0,1/c]} + \|\theta_{c^k} - \mu_{c^k}\|_{[1/c,1]} + \\ &+ \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} + \|x - y_c\|_{[1/c,1]} < \varepsilon \} \supseteq \\ &\supseteq \{ 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + 2\|x\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} + < \varepsilon \}, \end{aligned} \quad (89)$$

где

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/c], \\ x(t) - x(1/c), & t \in (1/c, 1], \end{cases} \\ \mu_{c^k}(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/c], \\ \theta_{c^k}(t) - \theta_{c^k}(1/c), & t \in (1/c, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$, любой функции $x \in K_r(a)$, применяя неравенство Коши-Буняковского и выбирая $c > 36r^2\lambda^2/\varepsilon^2$, имеем

$$\|x\|_{[0,1/c]} = \sup_{t \in [0,1/c]} \int_0^t \dot{x}(s) ds \leq \left(\lambda \int_0^{1/c} \frac{\dot{x}^2(s)}{a} ds \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{\lambda r}{\sqrt{c}} < \varepsilon/3.$$

Поэтому, из (89) следует, что достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}\right) = 1.$$

Обозначим

$$A_k = \{\omega : \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < \varepsilon/3\}, \quad B_k = \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} < \varepsilon/3\}.$$

Тогда $A_k \cap B_k \subseteq \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{\omega : 2\|\theta_{c^k}\|_{[0,1/c]} + \|\mu_{c^k} - y_c\|_{[1/c,1]} < 2\varepsilon/3\}\right) &\geq \\ &\geq \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} (A_k \cap B_k)\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} (\overline{A_k} \cup \overline{B_k})\right). \end{aligned} \quad (90)$$

Из (90) следует, что достаточно показать, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_j^l) = 0, \quad \text{где } C_k^l = \bigcap_{k=j}^l (\overline{A_k} \cup \overline{B_k}). \quad (91)$$

Лемма 20. $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_j^l) = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что это не так, то есть существует j такое, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_j^l) = d > 0$. Покажем, что

$$\mathbf{P}(C_j^l) \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=j}^l \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}\right\}, \quad (92)$$

где $r^2 < \bar{r} < R^2$.

Доказательство проведем методом математической индукции.

Шаг 1. $l = j$

Оценим $\mathbf{P}(C_j^j)$. Используя лемму 13 и принцип больших уклонений для открытых множеств из леммы 19 $\forall \gamma > 0$ для $c > c(\gamma)$ будем иметь

$$\mathbf{P}(C_j^j) = 1 - \mathbf{P}(A_j \cap B_j) \leq 1 - \mathbf{P}(A_j) + \mathbf{P}(\overline{B_j}) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 - \exp\{-\varphi^2(c^j)(r^2/2 + \gamma)\} + \mathbf{P}(\overline{B_j})/d \leq \\ &\leq 1 - \exp\{-\varphi^2(c^j)(r^2/2 + \gamma)\} + \frac{2}{d} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 \varphi^2(c^j)c}{72\lambda}\right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{r} = \frac{R^2+r^2}{2} \wedge (2+r^2)$.

Выбирая $\gamma = \frac{R^2-r^2}{4} \wedge 1$ для $c > c(\gamma) \vee (36\bar{r}\lambda/\varepsilon^2 + 72\lambda \ln(4/d)/\varepsilon^2)$, используя неравенство $1 - x \leq \exp(-x)$, получаем

$$\mathbf{P}(\overline{C_j^j}) \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^j)\bar{r}}{2}\right\}\right\}. \quad (93)$$

Шаг 2.

Предположим, что (92) выполнено для $l = q - 1$.

$$\mathbf{P}(\overline{A_k^{q-1}}) \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=j}^{q-1} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}\right\}. \quad (94)$$

Шаг 3.

Докажем (94) для $l = q$. Используя лемму 13 и принцип больших уклонений для открытых множеств из леммы 19, для выбранных на первом шаге $\bar{r}$ и c , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_j^q) &= \mathbf{P}((\overline{A_q} \cup \overline{B_q}) \cap C_j^{q-1}) = \mathbf{P}(C_j^{q-1})\mathbf{P}(\overline{A_q} \cup \overline{B_q} | C_j^{q-1}) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(C_j^{q-1}) \left(1 - \mathbf{P}(A_q | C_j^{q-1}) + \frac{\mathbf{P}(\overline{B_q})}{d}\right) = \\ &= \mathbf{P}(C_j^{q-1}) \left(1 - \mathbf{P}(\|\mu_{c^q} - y_c\|_{[1/c,1]} < \frac{\varepsilon}{3} | C_j^{q-1}) + \frac{2}{d} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 \varphi^2(c^q)c}{72\lambda}\right\}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(C_j^{q-1}) \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}\right) \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=j}^q \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}\right\}. \quad (95) \end{aligned}$$

Из (93)-(95) следует (92).

В силу условия (79) ряд $\sum_{k=j}^l \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}$ расходится, поэтому

$$0 < d < \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_j^l) \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=j}^{\infty} \exp\left\{\frac{-\varphi^2(c^k)\bar{r}}{2}\right\}\right\} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 20. $\square$

Таким образом, выполнено условие (91) откуда следует, что выполнено (88). Теорема 9 полностью доказана. $\square$

§3. Примеры.

Теорема 9 применима, например, в следующих случаях:

- 1) если $f_n(\omega, s) = f(s)$ – случай процессов с независимыми приращениями;
- 2) если $f_n(\omega, s)$ и $w(s)$ независимы;
- 3) если есть эффект усреднения (например, периодический коэффициент диффузии, диффузионный процесс в случайной среде).

Приведем несколько примеров.

Закон повторного логарифма для диффузионного процесса с независимыми приращениями.

Рассмотрим случайный процесс с независимыми приращениями

$$X_1(t) = x_0 + \int_0^t f(s)dw(s),$$

где детерминированная функция $f(s)$ удовлетворяет условию: существует $\lambda \geq 1$ такое, что $\frac{1}{\lambda} \leq f^2(s) \leq \lambda$.

Пусть

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(s)ds = a, \quad (96)$$

функция $\varphi(n) \in \Phi$. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\frac{X_1(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{nt} f(s)dw.$$

Проверим условие теоремы 9. Используя условие (96) для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n , получаем

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f^2(ns) - a)ds \right| \leq \varepsilon/2 + \sup_{t \in [\varepsilon/2\lambda, 1]} \left| \int_{\varepsilon/2\lambda}^t (f^2(ns) - a)ds \right| = \varepsilon/2 +$$

$$+ \sup_{t \in [\varepsilon/2\lambda, 1]} \left| t \frac{1}{nt} \int_{\varepsilon/2\lambda}^{nt} (f^2(s) - a) ds \right| < \varepsilon/2 + \sup_{t \in [\varepsilon/2\lambda, 1]} (t\varepsilon/2) < \varepsilon.$$

Таким образом, условие (80) выполнено. Значит, для последовательности случайных процессов $\frac{X_1(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)}$ справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (79).

Подинтегральная функция не зависит от $w(t)$.

Рассмотрим интеграл Ито следующего вида

$$X_2(t) = x_0 + \int_0^t (a + (-1)^{\nu(s)}) dw(s),$$

где константа $a > 1$, $\nu(s)$ — $\mathfrak{F}_s$ — прогрессивно измеримый, независимый от $w(s)$ процесс Пуассона с параметром λs .

Пусть функция $\varphi(n) \in \Phi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\frac{X_2(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{nt} (a + (-1)^{\nu(s)}) dw.$$

Заметим, что

$$\int_0^t ((a + (-1)^{\nu(ns)})^2 - a^2 - 1) ds = 2a \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds.$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$Y_n(t) = \frac{1}{2\lambda n} \left((-1)^{\nu(nt)} - 1 + 2\lambda n \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds \right).$$

Применяя к функции $\frac{\cos(\pi x)}{2\lambda n}$ и процессу $\nu(nt)$ формулу Ито, получаем, что

иначе процесс $Y_n(t)$ можно записать в следующем виде

$$Y_n(t) = -\frac{1}{\lambda n} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns),$$

где $\tilde{\nu}(s)$ – центрированный процесс Пуассона.

Так как $|(-1)^{\nu(nt)} - 1| < 2$ п. н., то для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,1]} \left| 2a \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} ds \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t \in [0,1]} \left| 2a \frac{1}{\lambda n} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns) \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{2a}{\sqrt{\lambda n} \tilde{\varphi}(n)} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns) \right|, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi}(n) = n^{1/4} \sqrt{\varphi(n)}$.

Из леммы 7 следует, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{2a}{\sqrt{\lambda n} \tilde{\varphi}(n)} \int_0^t (-1)^{\nu(ns)} d\tilde{\nu}(ns) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\tilde{\varphi}^2(n) \varepsilon^2}{64a^2} \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t ((a + (-1)^{\nu(ns)})^2 - a^2 - 1) ds \right| > \varepsilon \right) &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \left(-\frac{\tilde{\varphi}^2(n) \varepsilon^2}{64a^2} \right) = -\frac{\sqrt{n} \varepsilon^2}{64a^2 \varphi(n)} = -\infty \end{aligned}$$

и условие теоремы 9 выполнено.

Таким образом, условие (80) выполнено. Значит, для последовательности случайных процессов $\frac{X_2(nt) - x_0}{\sqrt{n} \varphi(n)}$ справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a^2 + 1)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (79).

Диффузионный процесс в случайной среде.

Определим случайный процесс $X_3(t)$ как решение уравнения

$$X_3(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(\omega, X_3(s)) dw(s), \quad (97)$$

где $\sigma(\omega, x)$ – стационарный эргодический марковский процесс со значениями во множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $a_i \neq 0$, с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями; винеровский процесс $w(t)$ и марковский процесс $\sigma(\omega, x)$ независимы. В работе [29] обосновывается существование и единственность слабого решения для уравнений типа (97).

Обозначим

$$a = 1 / \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i,$$

где $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ – распределение $\sigma(0, \omega)$.

Пусть функция $\varphi(n) \in \Phi$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^5(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$\frac{X_3(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{nt} \sigma(\omega, X_3(s)) dw(s). \quad (98)$$

Обозначим

$$x_n(t) = \frac{X_3(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)}.$$

Справедливо равенство

$$X_3(nt) = x_0 + \sqrt{n}\varphi(n)x_n(t),$$

поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (\tilde{\sigma}^2(\omega, \sqrt{n}\varphi(n)x_n(s)) - a) ds \right| > \varepsilon \right) = -\infty, \quad (99)$$

где $\tilde{\sigma}(\omega, x) = \sigma(\omega, x_0 + x)$ – стационарный эргодический марковский процесс.

Из (98) следует, что справедливо уравнение

$$x_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \tilde{\sigma}(\omega, \sqrt{n}\varphi(n)x_n(s))dw_n(s), \quad (100)$$

где $w_n(t) = \frac{w(nt)}{\sqrt{n}}$.

При сделанных предположениях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{(\sqrt{n}\varphi(n))^{1/6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{5/6}(n)}{n^{1/12}} = 0.$$

Поэтому условие (99) для уравнений (100) установлено в [29].

Значит, для последовательности случайных процессов $\frac{X_3(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)}$ справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (79).

Подинтегральная функция зависит от n .

Рассмотрим процесс

$$X_4^n(t) = x_0 + \int_0^t (a + \cos(ns))dw(s), \quad a > 1.$$

Для последовательности случайных процессов

$$\frac{X_4^n(nt) - x_0}{\sqrt{n}\varphi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\varphi(n)} \int_0^{nt} (a + \cos(ns))dw, \quad \varphi(n) \in \Phi,$$

справедлив закон повторного логарифма с множеством предельных точек $K_R(a^2 + 1/2)$, где $R^2 = R^2(\varphi)$ определяется формулой (79).

Действительно, для достаточно больших n и любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t ((a + \cos(n^2s))^2 - a^2 - 1/2)ds \right| =$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \left(2a \cos(n^2 s) + \frac{\cos(2n^2 s)}{2} \right) ds \right| \leq \frac{1}{n^2} \left(2a + \frac{1}{4} \right) < \varepsilon,$$

поэтому условие (80) выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе обоснован принцип умеренно больших уклонений для случайных процессов трех видов.

- 1) Процессов содержащих интеграл по мартингальной пуассоновской мере;
- 2) нормированных процессов типа телеграфного сигнала;
- 3) диффузионных процессов.

Основная идея, изложенная в данной работе, состоит в получении п.у.б.у. для семимартингалов, используя сходимость абсолютно непрерывной компоненты и квадратической характеристики мартингальной компоненты к детерминированным функциям. Полученный таким образом функционал действия будет всегда совпадать с функционалом действия для некоторого процесса с независимыми приращениями.

Одним из естественных применений п.б.у. является получение законов типа повторного логарифма. Этому вопросу была посвящена четвертая глава диссертации. В ней доказывается закон повторного логарифма для последовательности интегралов Ито

$$\frac{\int_0^{nt} f_n(\omega, s) dw(s)}{\varphi(n)\sqrt{n}}.$$

Полученная теорема применима, например, в следующих случаях:

- 1) диффузионный процесс с независимыми приращениями;
- 2) подинтегральная функция не зависит от $w(t)$;
- 3) есть эффект усреднения (например, уравнения с периодическим коэффициентом диффузии, диффузия в случайной среде).

Список литературы

- [1] Боровков А.А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 1967. – Т. 12. – № 4. – С. 635-654.
- [2] Боровков А.А. Теория вероятностей. – М. URSS. – 2009. – 652 С.
- [3] Боровков А.А. Боровков К.А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно изменяющимися хвостами // Теория вероятностей и ее применения. – 2001. – Т. 46. – № 2. – С. 209-232.
- [4] Боровков А.А. Боровков К.А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. II. Регулярные экспоненциально убывающие распределения // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т. 49. – № 2. – С. 209-230.
- [5] Боровков А. А. Могульский А. А. Неравенства и принципы больших отклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сибирский Математический Журнал. – 2013. – Т. 54. – № 2. – С. 286-297.
- [6] Боровков А.А. Могульский А.А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. I // Теория вероятностей и ее применения. – 2011. – Т. 56. – № 4. – С. 627-655.
- [7] Боровков А.А. Могульский А.А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. II // Теория вероятностей и ее применения. – 2012. – Т. 57. – № 1. – С. 3-34.

- [8] Боровков А.А. Могульский А.А. Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. III //Теория вероятностей и ее применения. – 2013. – Т. 58. – № 1. – С. 37-52.
- [9] Боровков А.А. Могульский А.А. Принципы умеренно больших уклонений для траектории случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями //Теория вероятностей и ее применения. – 2013. – Т. 58. – № 4. – С. 648-671.
- [10] Булинский А.В. Новый вариант функционального закона повторного логарифма //Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – №3. т. 25 – С. 502-511.
- [11] Булинский А.В. Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М. ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 408 С.
- [12] Ватанабэ С. Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. - М. Наука. - 1986. - 446 С.
- [13] Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов I. //Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21. – № 2. – С. 235-252.
- [14] Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов II. //Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21. – № 3. – С. 512-526.
- [15] Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов III. //Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Т. 24. – № 4. – С. 673-691.

- [16] Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов IV. //Теория вероятностей и ее применения. 1982. – Т. 27. – № 2. – С. 209-227.
- [17] Вентцель А.Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. – М. Наука. – 1986.
- [18] Вентцель А.Д. Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М. Наука. – 1979. – 424 С.
- [19] Веретенников А.Ю. О больших отклонениях для систем стохастических уравнений Ито //Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – Т. 36. – № 4. – С. 625-634.
- [20] Веретенников А. Ю. О больших отклонениях для аддитивных функционалов марковских процессов. //Теория вероятностей и ее применения. – 1993. – Т. 38. – № 4. – С. 758-774.
- [21] Веретенников А. Ю. О больших отклонениях для диффузионных процессов с измеримыми коэффициентами //Успехи математических наук. – 1995. – Т. 50. – № 5 (305). – С. 135-146.
- [22] Веретенников А. Ю. О больших отклонениях для стохастических дифференциальных уравнений с малой диффузией и усреднением //Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – № 2. – С. 349-351.
- [23] Гертнер Ю. Теоремы о больших отклонениях для некоторого класса случайных процессов //Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21. – № 1. – С. 95-106.

- [24] Гертнер Ю. О больших отклонениях от инвариантной меры // Теория вероятностей и ее применения. – 1977. – Т. 22. – № 1. – С. 27-42.
- [25] Гихман И.И. Сороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - К. Наукова думка. - 1968. - 355 С.
- [26] Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К. Наукова Думка. – 1982.
- [27] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М. Наука. - 1967. - 472 С.
- [28] Кляцкин К.И. Стохастические уравнения глазами физика. – М. Физматлит. – 2001. – 528 С.
- [29] Липцер Р.Ш. Чиганский П. Умеренные отклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде // Теория вероятностей и ее приложения. – 2009. – №1. т. 54 – С. 39-62.
- [30] Липцер Р.Ш. Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М. Наука. – 1986. – 512 С.
- [31] Логачёв А.В. Большие отклонения для решений одномерных уравнений Ито // Теорія ймовірностей та математична статистика.- 2014. - т. 90. - С. 113–122.
- [32] Логачёв А.В. Предельная теорема для интеграла от телеграфного сигнала // Прикладна статистика актуарна та фінансова математика. - 2003. - № 1-2. – С. 77-86.

- [33] Логачёв А.В. Функциональный закон повторного логарифма для стохастических интегралов Ито // Український математичний вісник. - 2014. - т. 11. - № 4. - С. 508-523.
- [34] Махно С.Я. Параболические уравнения с малым параметром и большие отклонения для диффузионных процессов // Математический сборник. - 1994. - Т. 185. - № 11. - С. 41-56.
- [35] Махно С.Я. Теорема о больших отклонениях для одного класса диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. - 1994. - Т. 39. - № 3. - С. 554-566.
- [36] Махно С. Я. Большие отклонения для решений стохастических уравнений // Теория вероятностей и ее применения. - 1995. - Т. 40. - № 4. - С. 764-785.
- [37] Могульский А.А. Большие отклонения для траекторий многомерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. - 1976. - Т. 21. - № 2. - С. 309-323.
- [38] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М. Наука. - 1974.
- [39] Пухальский А.А. Большие отклонения стохастических динамических систем. - М. Физматлит. - 2005.
- [40] Райс С.О. в. сб. : Теория передачи электрических сигналов при наличии помех // М. - 1953. - С. 88-238.
- [41] Самойленко І.В. Великі відхилення для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі пуасонової апроксимації // Теор. ймовір. та матем. статист. - № 85 - 2011. - С. 95–102.

- [42] Arcones M.A. The large deviation principle for stochastic processes I. //Theory of Probability and Its Applications. – 2003. – v. 47. – № 4. – p. 567-583.
- [43] Arcones M.A. The large deviation principle for stochastic processes II. //Theory of Probability and Its Applications. – 2004. – v. 48. – № 1. – p. 19-44.
- [44] Bardina X. The complex Brownian motion as a weak limit of processes constructed from a Poisson process // Stochastic Analysis and Related Topics. – 2001. – v. 48 – p. 149-158.
- [45] Bondarenko Y.V. Probabilistic Model for Description of Evolution of Financial Indices //Cybernetics and systems analysis. – 2000. – v. 36 – p. 738–742.
- [46] Chiang T.S. Sheu S.J. Large deviations of diffusion processes with discontinuous drift and their occupation times //Ann. Probab. - № 28. - 2000. - p. 140–165.
- [47] Chiang T.S. Sheu S.J. Small perturbations of diffusions in inhomogeneous media //Ann. Inst. Henri Poincare – 2002. – v. 38. - № 3. – p. 285-318.
- [48] Cramer H. Sur un nouveau theoreme-limite de la theorie des probabilites //Actualites Scientifiques et Industrielles. Hermann, Paris. - 1938. - p. 5-23.
- [49] Dembo A. Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. - Springer. 2nd edition. - 1998.
- [50] Donsker M.D. Varadhan R.S. Asymptotic evaluation of Markov process expectations for large time I.//Comm. Pure Appl. Math. № 27. - 1975. - p. 1-47.

- [51] Donsker M.D. Varadhan R.S. Asymptotic evaluation of Markov process expectations for large time II. // Comm. Pure Appl. Math. № 28. - 1975. - p. 279-301.
- [52] Donsker M.D. Varadhan R.S. Asymptotic evaluation of Markov process expectations for large time III. // Comm. Pure Appl. Math. № 29. - 1976. - p. 389-461.
- [53] Dupuis P. Ellis R.S. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. – Wiley. – New York. – 1997.
- [54] Feng J. Kurtz T. Large deviations for stochastic processes. - American Mathematical Society. - 2006.
- [55] Feng J. Martingale problems for large deviations of Markov processes //Stochastic Process. Appl. - v. 81. - № 2. - 1999. - p. 165–216.
- [56] Freidlin M.I. Sowers R.B. A comparison of homogenization and large deviations, with applications to wavefront propagation //Stochastic processes and their applications. – 1999. – v. 82. – № 1. – p. 23-52.
- [57] Freidlin M.I. The averaging principle and theorems on large deviations. //Russian Math. Surveys - 1978. - № 3. - p. 117-176.
- [58] Kac M. A Stochastic model related to the telegrapher's equation //Rocky Mountain J. Math. – 1974. – № 4. – p. 497-509.
- [59] Krykun I.H. Large deviation principle for stochastic equations with local time // Theory of Stochastic Processes. – 2009. – v. 15. - № 2. – p. 140-155.
- [60] Krylov N.V. On Ito's stochastic differential equations // Theory of Probability and Its Applications. -1969. - v. 14. - № 2. - p. 330–336.

- [61] Logachov A.V. Makhno S.Y. Large deviations for integrals of telegraph processes type // Random Operators and Stochastic Equations. – 2014. – v. 22. – № 1. – p. 43-52.
- [62] Logachov A. Large deviation principle for processes with Poisson noise term // Theory of Stochastic Processes. - 2012 - v. 18(34). - № 2. - p. 59-76.
- [63] Logachov A.V. The functional law of iterated logarithm for Ito stochastic integrals // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. - v. 207. - № 1. – p. 47-58.
- [64] Lynch J. Sethuraman J. Large deviations for processes with independent increments //The annals of probability. – 1987. – p. 610-627.
- [65] Makhno S.Ya. Functional iterated logarithmic law for solutions of stochastic equations //Stochastics. – 2000. – v. 70 – № 3-4 – p. 221-239.
- [66] Mogulskii A. A. Large deviations for processes with independent increments //The annals of probability. – 1993. – p. 202-215.
- [67] Newman D.S. On the probability distribution of a filtered random telegraph signal// The annals of mathematical statistics. – 1968. – v. 39 – № 3 – p. 890-896.
- [68] Puhalskii A.A. Large deviations and Idempotent Probability. – Chapman and Hall/CRC. – New York. – 2001.
- [69] Puhalskii A. On functional principle of large deviations // New Trends in Probability and Statistics. v. 1 – Bakuriani. – 1990. – p. 198-219.

- [70] Puhalskii A.A. On some degenerate large deviation problems // Electronic journal of probability. - 2004. - v. 9. - p. 862-886.
- [71] Puhalskii A. The method of stochastic exponentials for large deviations // Stochastic Process. Appl. - v. 54. - 1994. - p. 45-70.
- [72] Rockner M. Zhang T. Stochastic evolution equations of jump type: existence, uniqueness and large deviation principles // Potential Analysis. - 2007. - v. 26. - № 3. - p. 255-279.
- [73] Strassen V. An invariance principle of the law of the iterated logarithm // Z. Wahrsch. Verw. Geb. - 1964. № 3. - p. 211-226.
- [74] Stroock D.W. Lectures on Topics in Stochastic Differential Equations // Tata Institute of Fundamental Research. — Bombay — 1982. — 85 p.
- [75] Varadhan R.S. Large deviations and applications. - Pennsylvania. - 1984. - 76 p.